

# Introduction à la physique de l'atmosphère et de l'océan

## Première partie . Structure et composition

### 1. Composition moyenne

#### 1.1. Atmosphère

L'air est un mélange de *gaz*, dont la composition est détaillée dans le tableau (1). On fait l'hypothèse que la dilution est suffisante pour que les molécules de gaz n'interagissent pas entre elles ; on dit que l'air est un *gaz parfait*.

Cette composition s'exprime généralement en utilisant le rapport de mélange volumique, ou la proportion d'un volume d'air occupée par un gaz particulier. L'air étant un gaz parfait (section 2), ce rapport de mélange volumique est égal au rapport du nombre de molécules du gaz sur le nombre total :

$$r_i = \frac{n_i}{\sum n_k}$$

Le rapport de mélange est exprimé en pourcentage pour les composés les plus abondants, et pour les gaz traces en parties par million (ppm) ou par milliards (ppb). Une concentration d'1 ppm correspond donc à une molécule sur 1 million de molécules d'air, ou un rapport de mélange de  $10^{-6}$ .

L'azote et l'oxygène dominent largement la composition (tableau 1), suivis par l'argon et d'autre gaz rares beaucoup moins abondants. Les concentrations de vapeur d'eau et d'ozone sont très variables, la vapeur d'eau étant présente surtout dans la troposphère, avec un maximum près de la surface et dans les tropiques (figure ??), et l'ozone dans la stratosphère. Un certain nombre de gaz traces sont émis régulièrement au niveau de la surface, par des phénomènes naturels ou les activités humaines. Leur répartition dépend alors beaucoup de leur durée de vie dans l'atmosphère. Le  $\text{CO}_2$  qui est très stable est bien mélangé. Le méthane, qui a une durée de vie d'une dizaine d'années, est bien réparti dans la troposphère mais sa concentration varie dans la stratosphère. Des polluants à durée de vie courte (quelques jours) comme l'ozone troposphérique, se retrouveront surtout au voisinage des sources. Les activités humaines ont également contribué à modifier la concentration de certains de ces gaz.

Constituant	Masse Molaire	Rapport de Mélange
Azote (N <sub>2</sub> )	28	78%
Oxygène (O <sub>2</sub> )	32	21%
Argon (Ar)	40	0.93%
<b>Vapeur d'eau (H<sub>2</sub>O)</b>	18	0-5%
<b>Dioxyde de Carbone (CO<sub>2</sub>)</b>	44	380 ppm
Néon (Ne)	20	18 ppm
Hélium (He)	4	5 ppm
<b>Méthane (CH<sub>4</sub>)</b>	16	1.75 ppm
Krypton (Kr)	84	1 ppm
Hydrogène (H <sub>2</sub> )	2	0.5 ppm
<b>Oxide nitreux (N<sub>2</sub>O)</b>	56	0.3 ppm
<b>Ozone (O<sub>3</sub>)</b>	48	0-0.1 ppm

TABLE 1 – Principaux composants de l'atmosphère. Les gaz à effet de serre sont indiqués en gras.

Cette composition de l'air est valide et constante sur les premiers 80 à 100 km d'altitude, à part quelques constituants mineurs. On appelle cette région l'*homosphère*. Au dessus de cette altitude, le libre parcours moyen des molécules devient très grand, et on a une décantation où les éléments plus légers dominent progressivement aux altitudes élevées.

## 1.2. Océan

L'océan est bien sûr composé d'eau liquide, dans laquelle sont dissous un certain nombre de *sels*, surtout mais pas uniquement du chlorure de sodium (NaCl): on a aussi des sulfates, bromures, du magnésium, calcium etc.

La *salinité* de l'océan est typiquement estimée par des mesures de conductivité électrique, comme les différents sels ont des conductivités différentes on peut difficilement donner un rapport de mélange exact du sel. La salinité s'exprimera donc en « practical salinity units » ou PSU, qui correspond approximativement à des g/kg. La salinité moyenne est de 35 PSU.

On trouve ensuite toutes sortes d'autres éléments, en particulier des gaz atmosphériques dissous comme l'oxygène. La concentration de ces gaz peut varier beaucoup même loin de la surface, en particulier si ils interagissent avec l'activité biologique.

## 2. Équation d'état

L'état de l'atmosphère ou l'océan est décrit par trois variables thermodynamiques principales: l'état de

- la température  $T$ , exprimée en kelvins K ou Celsius °C.
- la pression  $p$ , exprimée en Pascals Pa ou en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ .
- la masse volumique (ou densité)  $\rho$ , exprimée en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Ces variables sont reliées entre elles par l'équation d'état, qui donne  $\rho$  en fonction de  $T$  et  $p$ :

$$\rho = f(T, p)$$

Cette équation est utilisée pour trouver la valeur de  $\rho$ , pas pour trouver la pression en fonction de la température ou vice-versa.

### 2.1. Atmosphère

L'air est considéré comme un *gaz parfait*, ce qui veut dire qu'il est suffisamment dilué pour que les interactions entre les molécules soient négligeables. La relation entre pression, volume et température d'un gaz parfait s'écrit:

$$pV = nR^*T$$

où  $n$  est le nombre de moles du gaz et  $R^* = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits<sup>1</sup>.

Pour chacun des constituants  $i$  de l'atmosphère dans un même volume  $V$ , on peut alors écrire:

$$p_i V = n_i R^* T$$

avec  $p_i$  la pression partielle du gaz et  $n_i$  son nombre de moles. En faisant la somme sur tous les gaz, on obtient

$$pV = \Sigma(n_i)R^*T$$

(on a utilisé la loi de Dalton  $p = \Sigma p_i$  pour un gaz parfait).

Par ailleurs, la masse totale contenue dans ce volume peut s'écrire  $m = \Sigma n_i M_i$  où  $M_i$  est la masse molaire du gaz  $i$ . En divisant l'équation précédente par  $m$ , on obtient:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\Sigma n_i}{\Sigma n_i M_i} R^* T$$

On pose  $M = \frac{\Sigma n_i M_i}{\Sigma n_i}$  la masse molaire de l'air, et  $R = R^*/M$  (*constante de l'air sec*,  $R = 287 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ ). On a alors l'équation des gaz parfaits pour l'atmosphère:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{1}$$

---

1. On utilisera la notation  $X^*$  pour toutes les grandeurs molaires, et  $X$  pour les grandeurs massiques

## 2.2. Océan

Dans l'océan, la masse volumique va être une fonction de trois variables, la salinité ayant également un impact important :

$$\rho = f(T, S, p)$$

Cette fonction ne s'exprime pas simplement, on utilise en pratique de nombreuses formes semi-empiriques plus ou moins précises.

La masse volumique de l'eau de mer reste en pratique légèrement supérieure à  $\rho_{\text{ref}} = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , et on utilise souvent en océanographie une *anomalie de densité*  $\sigma$

$$\sigma = \rho - \rho_{\text{ref}}$$

La forme la plus simple de l'équation d'état est de linéariser  $\sigma$  autour de valeurs moyennes :

$$\sigma = \sigma_0 + \rho_{\text{ref}} [\beta_S(S - S_0) - \beta_T(T - T_0) + \beta_p(p - p_0)] \quad (2)$$

On a  $\sigma_0 = 26 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ,  $S_0 = 35 \text{ PSU}$ . On notera  $\rho_0$  la valeur moyenne de  $\rho$  :

$$\rho_0 = \rho_{\text{ref}} + \sigma_0$$

Le signe devant les *coefficients de compressibilité*  $\beta$  reflète que la densité diminue avec la température, et augmente avec la salinité ou la pression. Ces coefficients dépendent à leur tour de  $T$ ,  $S$  ou  $p$  ; des valeurs typiques sont  $\beta_T = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\beta_S = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ PSU}^{-1}$  et  $\beta_p = 4,1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ . Noter qu'on peut avoir à des densités proches des masses d'eau ayant des températures et salinités différentes, si les 2 se compensent.

On voit que contrairement à l'atmosphère, l'effet de la pression va être très faible : l'eau de mer est quasiment incompressible. L'impact de la pression devient seulement significatif (du même ordre de grandeur que celui de la température ou la salinité) quand les différences de profondeur (donc de pression) sont grandes, entre des eaux de surface et de fond. On utilise alors une grandeur appelée *densité potentielle* qui permet de comparer des masses d'eau en les ramenant – virtuellement – à la même pression de surface.

### 2.2.1. Hydrographie

La température ou la salinité d'une parcelle d'eau évoluent surtout quand elle est au voisinage de la surface, par échange de chaleur ou d'eau (évaporation, apport d'eau douce, formation de banquise etc). Plus en profondeur, une masse d'eau tend à conserver ses caractéristiques en  $T$ ,  $S$  et donc  $\rho$  : elles évoluent seulement par mélange, qui est assez faible loin de la surface (plus d'effet direct du vent).

On peut de cette façon identifier des *masses d'eau* grâce à leur température ou salinité (et en particulier mieux les séparer qu'avec leur densité), et les suivre au cours de leur

parcours depuis leur région de formation en surface. Si il y a un mélange entre 2 masses d'eau, le résultat se situe sur le segment reliant les 2 caractéristiques initiales dans un diagramme  $(T, S)$ .

### 3. Profil vertical, équilibre hydrostatique

L'équilibre hydrostatique est l'équilibre des forces sur la verticale, entre les forces de pression et de pesanteur. Il permet d'obtenir le profil des variations de pression sur la verticale.

#### 3.1. Forces de pression

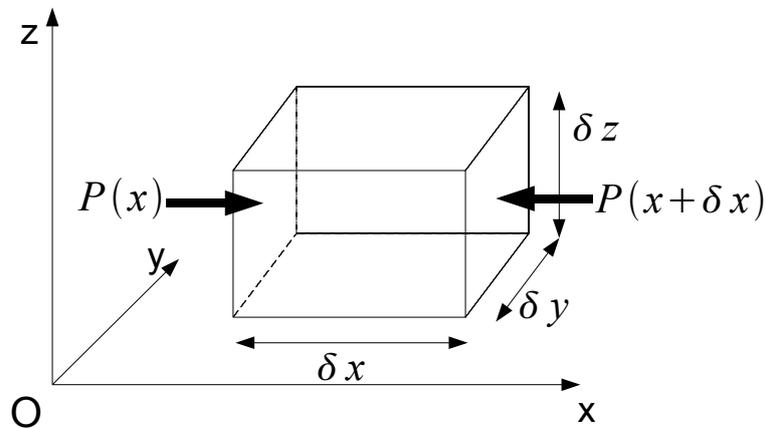


FIGURE 1 – Forces de pression (suivant  $(Ox)$ ) s'exerçant sur une parcelle.

Une surface  $S$  au contact d'un fluide subit une force de pression normale à cette surface; sa norme vaut  $pS^2$  où  $p$  est la pression du fluide. Pour une parcelle de fluide de volume  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$  (figure 1), la résultante des forces de pression s'exerçant sur ses différentes faces dans la direction  $(Ox)$  vaut donc

$$F_{p_x}^* = p(x) \cdot \delta y \delta z - p(x + \delta x) \cdot \delta y \delta z \simeq \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$$

(seules les 2 faces perpendiculaires à  $(Ox)$  subissent une force dans cette direction).

---

2. Une telle force par unité de surface s'appelle une *contrainte*

Par facilité, on appellera par la suite « force de pression » cette *résultante* des forces de pression<sup>3</sup>. On utilisera aussi souvent la force résultante *massique* (divisée par la masse de la parcelle, qui a donc la dimension d'une accélération), qui vaut

$$F_{p_x} = F_{p_x}^*/(\rho\delta x\delta y\delta z) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

On peut faire un calcul identique dans les directions (Oy) et (Oz), finalement la force de pression massique vaut :

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (3)$$

L'accélération due aux forces de pression s'exerçant sur la parcelle est opposée au gradient de pression. Elle est donc :

- Dirigée des hautes vers les basses pressions, perpendiculairement aux isobares
- Inversement proportionnelle à l'écartement des isobares

### 3.2. Bilan sur la verticale

On considère une parcelle d'air à une altitude  $z$ , d'épaisseur  $\delta z$  et de section  $\delta S$ . Les forces s'exerçant sur la parcelle sont :

- Son poids  $-mg$
- Les forces de pression  $p(z)\delta S - p(z + \delta z)\delta S \simeq -\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\delta S$
- Les forces de viscosité sont négligeables.

Après division par la masse de la parcelle  $m = \rho\delta z\delta S$ , l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

Au repos, l'accélération est nulle et on obtient alors la relation de l'*équilibre hydrostatique* :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5)$$

Cet équilibre est très bien vérifié aux grandes échelles utilisées en météorologie et en océanographie.

On peut obtenir le profil vertical de pression  $p(z)$  en intégrant l'équation (5). La différence de pression entre 2 niveaux verticaux vaut alors

$$p(z_2) - p(z_1) = g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) dz$$

---

3. En anglais on trouvera aussi *pressure gradient force* qui est plus correct

Le second membre est en fait le poids de la colonne d'air ou d'eau comprise entre  $z_1$  et  $z_2$ . *la différence de pression entre deux niveaux verticaux est proportionnelle à la masse de fluide (par unité de surface) entre ces niveaux.* Une conséquence immédiate est que *la pression diminue toujours sur la verticale.*

Pour trouver la valeur de la pression  $p$  à une certaine altitude ou profondeur, on intègre l'équilibre hydrostatique (5) depuis un niveau où  $p$  est connue, en utilisant l'équation d'état pour obtenir la valeur de  $\rho$ .

### 3.3. Atmosphère

L'intégration de l'équilibre hydrostatique (5) depuis le sommet de l'atmosphère (où  $p = 0$ ) montre donc que *la pression à une altitude  $z$  est proportionnelle au poids de la colonne d'air au dessus.*

Pour obtenir  $p(z)$ , on utilisera souvent la loi des gaz parfaits (1) pour exprimer  $\rho$  en fonction de la température  $T$  qui est plus facile à mesurer :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{RT}$$

Pour une atmosphère proche d'une isotherme, on obtient

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right) \quad (6)$$

où  $p_0$  est la pression à  $z = 0$ . On retrouve une décroissance exponentielle de la pression (et de la densité). Entre deux altitudes  $z_1$  et  $z_2$ , on a :

$$p(z_2) = p(z_1) \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT}\right) \quad (7)$$

ou en inversant la relation

$$z(p_2) - z(p_1) = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \quad (8)$$

La température  $T$  dans les équations (7,8) est la température moyenne entre les altitudes  $z_1$  et  $z_2$  (ou les pressions  $p_1, p_2$ ).

On voit que quand la température augmente, la pression décroît moins vite, ou de façon équivalente l'épaisseur (différence d'altitude) entre deux niveaux de pression est plus grande : l'air est moins dense, donc il faut une différence d'altitude plus grande pour obtenir une même masse d'air.

### 3.4. Océan

En intégrant (1), on obtient que la pression à une profondeur  $z$  est proportionnelle au poids de la colonne d'eau située au dessus (auquel il faut rajouter la pression atmosphérique):

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \int_z^h \rho g \, dz$$

où  $h$  est la hauteur de la surface de la mer par rapport à  $z = 0$  (en moyenne 0). Comme  $\rho$  varie peu, la pression est à peu près proportionnelle à la profondeur (contrairement à la variation exponentielle dans l'atmosphère):

$$p(z) \approx \rho_0 g (h - z)$$

Où la contribution de  $h$  devient faible quand la profondeur devient grande. La pression augmente en gros d'1 atmosphère tous les 10 m de profondeur.

## 4. Structure 3D, forces de pression horizontales

### 4.1. Forces de pression horizontales

Comme on l'a vu à la section 3 sur l'équilibre hydrostatique, la force de pression *massique* (en fait la résultante des contraintes sur la surface) s'exprime comme

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Cette force est toujours dirigée vers les basses pressions, perpendiculairement aux isobares.

Sur la verticale, ces forces de pression sont équilibrées par la pesanteur (équilibre hydrostatique). Les vents ou courants seront eux accélérés par la composante horizontale, qui peut s'écrire de façon générale

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_z(p)$$

### Vecteur gradient

On rappelle que le gradient d'une fonction scalaire comme la pression mesure ses variations spatiales: intensité et direction. Sa définition *intrinsèque* est que pour un petit déplacement  $d\vec{l}$  autour d'un point, la variation de pression vaut

$$dp = \overrightarrow{\text{grad } p} \cdot d\vec{l}$$

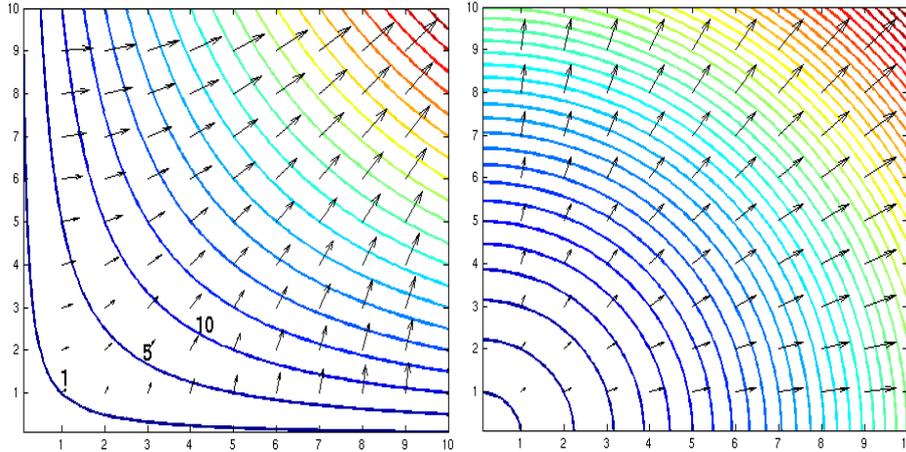


FIGURE 2 – Exemple de 2 champs synthétiques (en couleur : courbes de niveau, valeurs élevées en rouge, 1 contour tous les 5 unités sauf le premier) et de leur gradient (flèches : direction et norme). Le gradient est orthogonal aux courbes de niveau, et sa norme augmente quand elles sont rapprochées.

Le gradient est toujours dirigé des basses vers les hautes valeurs. Sa norme peut s'estimer comme

$$\|\vec{\text{grad}}_z(p)\| \approx \frac{\delta p}{\delta l}$$

Où  $\delta p$  est la différence de pression entre 2 points et  $\delta l$  la distance (prise perpendiculairement aux isobares). 2 exemples de champs idéalisés avec leur gradient sont tracés sur la figure (2).

## 4.2. Atmosphère

### 4.2.1. Formulation en pente des isobares

L'équilibre hydrostatique fait que la pression décroît toujours avec l'altitude. Une pression localement élevée doit donc correspondre à une altitude élevée des surfaces isobares. Dans l'atmosphère, on utilise souvent (sauf en surface) cette correspondance pour exprimer les forces de pression horizontales.

Sur la figure 3, la force de pression horizontale dans la direction (Ox) est

$$F_{p_x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_A}{\delta x}$$

Or A et C sont à la même pression, on a donc

$$F_{p_x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_C}{\delta x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_C}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$$

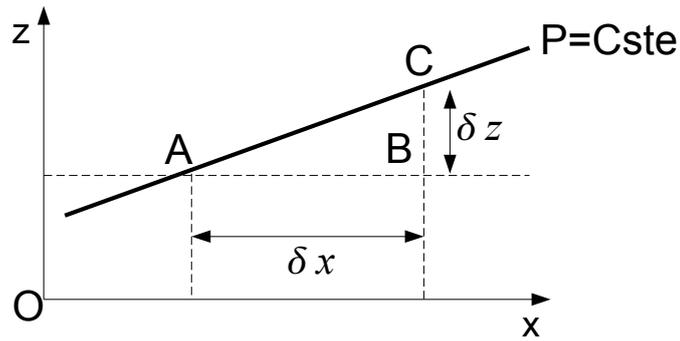


FIGURE 3 – Équivalence entre écarts de pression et d'altitude : les points A et B sont à la même altitude, A et C à la même pression. La pression en B est donc supérieure à celle en C.

En utilisant l'équilibre hydrostatique

$$\frac{p_B - p_C}{\delta z} = -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

et le fait que la pente est celle de la surface isobare, on trouve

$$F_{p_x} = -g \left( \frac{\delta z}{\delta x} \right)_p$$

On aurait une relation équivalente pour la direction (Oy), la force de pression horizontale vaut donc finalement

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}_z(p) = -g \overrightarrow{\text{grad}}_p(z) \quad (9)$$

L'avantage de la formulation (9) est que la densité  $\rho$  n'apparaît pas et est remplacée par la constante  $g$ . De façon complémentaire, on utilisera des cartes d'altitude d'une surface isobare. Les lignes à  $z$  constant tracées sont appelées *isohypses*. La force de pression horizontale est donc dirigée des hautes vers les basses valeurs de  $z$  à *pression constante*, perpendiculairement aux isohypses.

#### 4.2.2. Rôle des différences de température

Pour trouver les forces de pression horizontales, on doit donc comparer l'altitude d'un niveau de pression au dessus de deux points A et B voisins (figure 4). On utilise alors la relation (10), qu'on écrit au dessus de A et B :

$$z_B(p_2) - z_A(p_2) = z_B(p_1) - z_A(p_1) + \frac{R}{g} \langle T_B - T_A \rangle \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \quad (10)$$

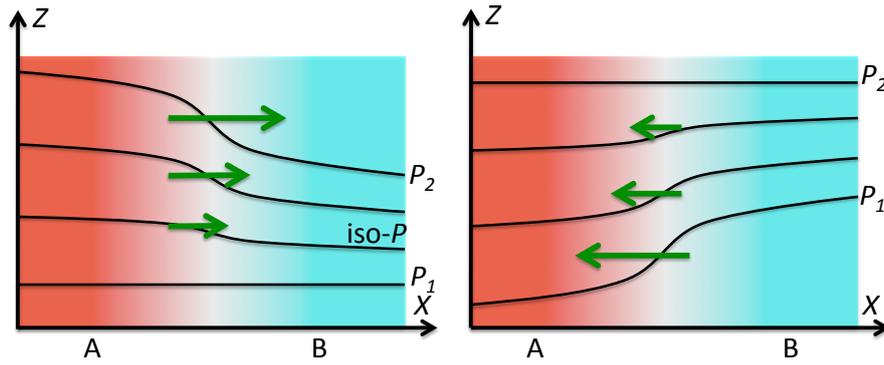


FIGURE 4 – Schéma de la structure verticale en pression au dessus de 2 points A et B ayant une température de la colonne d’air différente (plus chaud en A). Les courbes noires résentent des niveaux de pression constante (isobares) dont l’altitude varie entre A et B, la valeur de la pression diminuant vers le haut. Dans les 2 cas, l’épaisseur entre 2 niveaux de pression est plus grande quand l’air est plus chaud, mais le niveau de référence (isobare horizontale) est différent. Les flèches vertes symbolisent la composante horizontale des forces de pression, dirigée vers les basses valeurs.

où  $z_B$  et  $z_A$  sont les altitudes du niveau de pression  $p$  au dessus de B et A, et  $\langle T_B - T_A \rangle$  la différence de température moyenne entre B et A. On voit que l’équation (10) nous dit comment la différence d’altitude  $z_B - z_A$  varie avec la pression, mais pour trouver sa valeur on doit la connaitre à un niveau de référence  $p_1$ . Il est bien sûr plus simple si possible de choisir un niveau de référence  $p_1$  où  $z_B = z_A$ .

### 4.3. Océan

#### Océan

Dans l’océan, les variations relatives de densité sont faibles et on a

$$\vec{F}_p \approx -\frac{1}{\rho_0} \vec{\text{grad}}_z(p)$$

Comme toujours, la pression à une profondeur  $z$  est proportionnelle au poids de la colonne d’eau au dessus (en oubliant la pression atmosphérique). On peut distinguer deux sources de variations horizontales de  $p$  :

1. Les changements du niveau de la mer  $h$ . On ajoute alors (ou on enlève) une hauteur de fluide  $h$  à la densité proche de  $\rho_0$ .
2. Les fluctuations de la densité  $\rho$ , dues à des différences de température ou de salinité. Comme ces fluctuations sont relativement faibles, elles se feront sentir sur des profondeurs plus grandes.

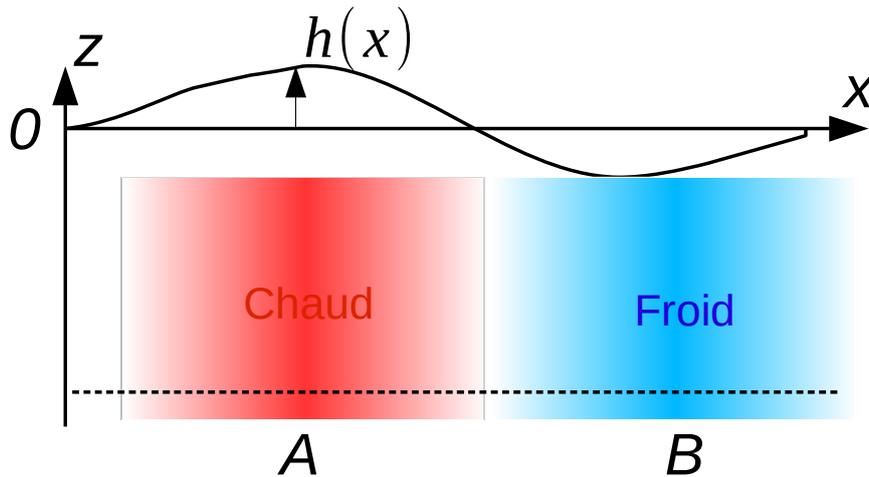


FIGURE 5 – Schéma des causes possibles de différences de pression à la profondeur  $z$  (ligne pointillée) entre les colonnes A et B : hauteur de la surface libre et densité moyenne de l'eau. Ici, la surface est plus élevée au dessus de A mais l'eau est plus chaude, donc moins dense : les 2 effets tendent à se compenser en profondeur.

Dans les 2 cas, le poids de la colonne d'eau au dessus d'une profondeur  $z$  donnée va changer (figure 5) : il sera plus élevé (donc la pression aussi) si  $h$  est plus élevée ou si l'eau est plus dense (plus froide ou plus salée).

Pour comparer ces 2 effets, on peut utiliser que les variations relatives de  $\rho$  dans l'océan sont faibles. La différence de pression à une profondeur  $z$  entre deux points A et B peut alors s'écrire (en oubliant la pression atmosphérique) :

$$p_B(z) - p_A(z) \approx \rho_0 g (h_B - h_A) + \int_z^0 (\rho_B - \rho_A) g dz \quad (11)$$

Le premier terme dans l'équation (11) est d'ordre de grandeur  $(\rho_0 g \delta h)$  et va être dominant près de la surface. Le deuxième est d'ordre  $(\delta \rho g z)$  et va devenir important pour des profondeurs plus grandes ( $z$  grand devant  $h$ ).

En divisant l'équation (11) par la distance entre A et B, on obtient le gradient horizontal de pression :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_z(p) \approx \rho_0 g \overrightarrow{\text{grad}} h + \int_z^0 g \overrightarrow{\text{grad}} \rho dz$$

Près de la surface la force de pression horizontale dépend seulement des variations de la hauteur dynamique :

$$\vec{F}_p^0 = -g \overrightarrow{\text{grad}}(h)$$

Plus en profondeur se rajoute une composante due aux différences horizontales de densité:

$$\vec{F}_p = \vec{F}_p^0 - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \vec{\text{grad}} \rho \, dz$$

# Deuxième partie .

## Circulation atmosphérique et océanique

### 5. Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'origine des mouvements horizontaux (les vents ou courants) de l'atmosphère et l'océan. On étudie pour cela les différentes forces horizontales en présence, puis comment leur équilibre va déterminer le mouvement observé.

#### 5.1. Système de coordonnées, repère local

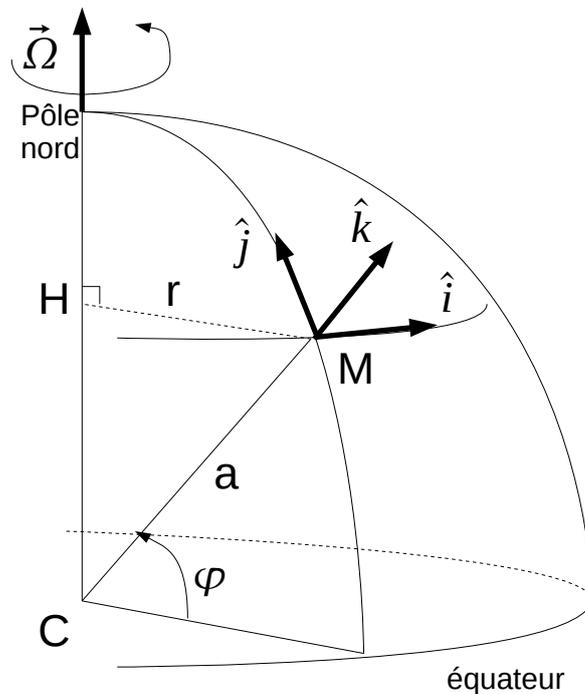


FIGURE 6 – Schéma du système de coordonnées et du repère utilisés.

La position d'un point  $M$  de l'atmosphère sera représentée dans un système de co-

ordonnées sphériques (figure 6) par sa latitude  $\varphi$ , sa longitude  $\lambda$ , et son altitude par rapport au niveau de la mer  $z$ . On note également  $\vec{\Omega}$  le vecteur dirigé suivant l'axe des pôles de norme  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Le point H est la projection de M sur l'axe des pôles,  $r$  la distance HM et  $a$  le rayon moyen de la Terre. Le vecteur unitaire dans la direction  $\overrightarrow{HM}$  est noté  $\hat{e}_r = \overrightarrow{HM}/r$ .

On distingue deux référentiels pour l'étude des mouvements de l'air :

- Un référentiel *fixe* orienté suivant les directions de trois étoiles. La vitesse *absolue* dans ce référentiel d'un point M à la surface de la Terre inclut son mouvement circulaire autour de l'axe des pôles dû à la rotation de la Terre. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.
- Un référentiel *tournant* lié à la Terre, en rotation autour de l'axe des pôles avec la vitesse angulaire  $\Omega$  de rotation de la Terre. La vitesse *relative* est mesurée par rapport à la surface de la Terre.

Pour les déplacements relatifs (par rapport à la surface de la Terre), on utilisera le repère local direct  $(M, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  où  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$  sont les vecteurs unitaires dirigés vers l'est et le nord, et  $\hat{k}$  est dirigé suivant la verticale (perpendiculairement à la surface) vers le haut.

Pour des petits déplacement qui ne sont pas d'échelle planétaire, on utilisera également des distances horizontales vers l'est et le nord

$$\begin{aligned} dx &= a d\lambda \cos \varphi \\ dy &= a d\varphi \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse relative dans ce repère sont notées  $(u, v, w)$  : vitesse vers l'est, vers le nord, et vers le haut. La composante horizontale de la vitesse, qui domine les mouvements, sera donc  $\vec{v}_h = u\hat{i} + v\hat{j}$ , et sa composante verticale  $w\hat{k}$ .

## 5.2. Équation du mouvement horizontal

L'équation de base pour la circulation atmosphérique et océanique est la relation fondamentale de la dynamique

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \tag{12}$$

Cette relation est cependant valable dans un référentiel galiléen, alors qu'on cherche plutôt à connaître les mouvements par rapport à la surface de la Terre, qui est en rotation autour de l'axe des pôles. On va donc dans un premier temps transposer cette relation dans le référentiel tournant habituel, puis étudier les principales forces horizontales. On utilisera dans la suite des forces *massiques* (divisées par la masse d'une parcelle), homogènes à une accélération.

En pratique, on verra que l'accélération *relative* est souvent négligeable pour les mouvements à grande échelle. On pourra donc expliquer ces mouvements par un équilibre entre différentes forces :  $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ .

## 6. Forces apparentes, force de Coriolis

On va chercher ici à exprimer l'accélération dans le référentiel tournant (qu'on veut connaître) en fonction de l'accélération dans le référentiel fixe (qui est égale à la somme des forces, d'après la relation fondamentale).

### 6.1. Dérivation mathématique

La relation entre la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{X}$  dans le référentiel fixe (*absolue*,  $a$ ) et celle dans le référentiel tournant (*relative*,  $r$ ) s'écrit

$$\frac{d\vec{X}}{dt}|_a = \frac{d\vec{X}}{dt}|_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{X} \quad (13)$$

En appliquant au vecteur  $\overrightarrow{CM}$ , avec  $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}$ , on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$$

Le terme  $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$  est la vitesse d'un point fixe par rapport au sol ( $\vec{v}_r = \vec{0}$ ), il est appelé *vitesse d'entraînement*  $\vec{v}_e$ . En dérivant à nouveau  $\vec{v}_a$  en utilisant (13), on obtient :

$$\vec{a}_a = \left( \frac{d\vec{v}_r}{dt}|_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \right) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM})$$

soit en regroupant et avec

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{a}_a = \Sigma \vec{F} = \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r - \Omega^2 \overrightarrow{HM} \quad (14)$$

Le premier terme est l'*accélération relative*, le deuxième l'*accélération de Coriolis*, le troisième est l'*accélération d'entraînement*  $\vec{a}_e$ .

Si on veut obtenir l'équivalent de la relation fondamentale (14) pour les mouvements par rapport à la surface, on obtient finalement :

$$\vec{a}_r = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM} + \Sigma \vec{F} \quad (15)$$

Les deux premiers termes du second membres sont des *forces apparentes*, liées à la rotation de la Terre. Le dernier terme  $\Sigma \vec{F}$  est la somme des forces *réelles* (divisées par la masse).

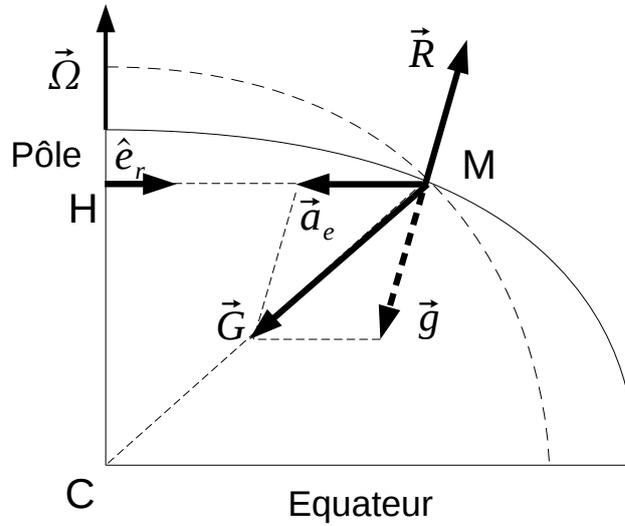


FIGURE 7 – Équilibre d'un point posé au sol. La forme réelle de la Terre (exagérée) est en trait continu, les pointillés montrent un sphère parfaite.

## 6.2. Pesanteur et équilibre d'un point posé sur le sol

On considère d'abord un point M de masse  $m$  immobile par rapport à la surface de la Terre. Les forces subies par M sont la force de gravitation  $m\vec{G}$ , dirigée vers le centre de la Terre, et  $\vec{R}$  la réaction du sol dirigée perpendiculairement à la surface (figure 7).

Dans le référentiel fixe, l'accélération de M est celle du mouvement circulaire uniforme, dirigée vers le centre du cercle :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e = -\Omega^2 r \hat{e}_r$$

aussi appelée *accélération d'entraînement*. On doit donc avoir

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 r \hat{e}_r = \vec{G} + \vec{R}/m \quad (16)$$

C'est impossible si la Terre est sphérique (sauf au pôle et à l'équateur) : on aurait alors  $\vec{R}$  et  $\vec{G}$  colinéaires mais pas dans la direction de  $\vec{a}_e$ . La Terre a donc en fait une forme aplatie, où la surface n'est pas parfaitement perpendiculaire à  $\vec{G}$ . Il est souvent plus simple de définir une gravité apparente, aussi appelée *pesanteur*, par  $\vec{g} = \vec{G} - \vec{a}_e$ . La relation fondamentale (16) devient alors :

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

Qui a la forme d'un équilibre des forces. La gravité apparente  $\vec{g}$  est dirigée localement vers le bas (parallèle à  $\vec{R}$  donc perpendiculaire à la surface) mais pas exactement vers le centre de la Terre. La gravité réelle  $\vec{G}$  a elle une faible composante horizontale. Comme  $\vec{G}$ ,  $\vec{g}$  dépend uniquement de la position du point M.

### 6.3. Force de Coriolis

Une parcelle de fluide en mouvement par rapport à la surface de la Terre va en plus subir la force apparente de Coriolis  $\vec{F}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$  (équation 15). Cette « force » étant orthogonale à la vitesse, sa puissance est nulle : la force de Coriolis va dévier le mouvement relatif mais ne peut pas modifier la vitesse du vent ou des courants. Dans le repère  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , ses composantes sont

$$\vec{F}_c = -2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -2\Omega \begin{pmatrix} w \cos \varphi - v \sin \varphi \\ u \sin \varphi \\ -u \cos \varphi \end{pmatrix}$$

En pratique, la composante verticale de  $\vec{F}_c$  (dirigée suivant  $\hat{k}$ ) est négligeable devant  $\vec{g}$  et les forces de pression, et ne modifie pas l'équilibre hydrostatique.

Sur l'horizontale, la force due à la vitesse verticale  $w$  est faible<sup>4</sup> également. Il reste donc uniquement la composante horizontale de  $\vec{F}_c$  due aux mouvements horizontaux :

$$\vec{F}_c \simeq -2\Omega \sin \varphi \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

ou sous forme vectorielle :

$$\vec{F}_c \simeq -f\hat{k} \wedge \vec{v}_h$$

où  $\vec{v}_h$  est la vitesse horizontale et  $f = 2\Omega \sin \varphi$  est appelé *facteur de Coriolis*. Aux moyennes latitudes ( $\varphi \sim 45^\circ$ ),  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Dans l'hémisphère nord, où  $\sin \varphi > 0$ , la force de Coriolis est donc dirigée à  $90^\circ$  à droite du vent, et sa norme vaut  $fV$ .

## 7. Forces de pression, équilibre géostrophique

Les forces de pression horizontales présentes dans l'atmosphère ou l'océan doivent être équilibrées soit par l'accélération relative, soit par la force de Coriolis. C'est cette dernière qui va dominer pour les mouvements de grande échelle, amenant à l'*équilibre géostrophique*.

---

4. Pour des mouvements de type « chute libre », la vitesse verticale  $w$  domine. On peut alors mettre en évidence une déviation vers l'est, mais qui reste très faible (de l'ordre de 1 cm pour 80 m de chute).

### Force de Coriolis

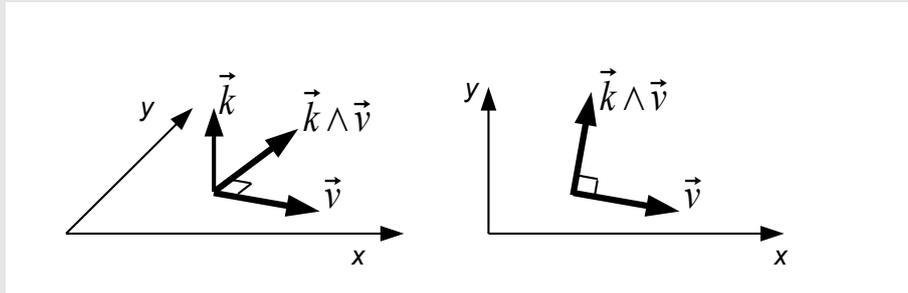
Force horizontale de Coriolis (dimension d'une accélération):

$$\vec{F}_c = -f\hat{k} \wedge \vec{v}$$

$\hat{k}$  est le vecteur unitaire vertical,  $\vec{v}$  la vitesse horizontale,  $f$  le facteur de Coriolis

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad \text{vers } 45^\circ\text{N}$$

$\vec{F}_c$  est orthogonale au vent, à sa droite dans l'hémisphère nord.



Pour un vecteur horizontal  $\vec{v}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{v}$  est une rotation de  $\vec{v}$  de  $90^\circ$  dans le sens direct (figure). En particulier, on a

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{v}) = -\vec{v}$$

## 7.1. Analyse en ordre de grandeur, nombre de Rossby

Pour savoir quel terme est dominant dans l'équation du mouvement (hors forces d'épression), on définit le *nombre de Rossby*  $Ro$  comme le rapport entre accélération relative et de Coriolis :

$$Ro \sim \frac{d\vec{v}_h/dt}{f\hat{k} \wedge \vec{v}_h}$$

Pour estimer sa valeur, on utilise le facteur de Coriolis  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  aux moyennes latitudes, les ordres de grandeur  $U$  de la vitesse du vent ou du courant, et  $L$  de l'échelle horizontale du mouvement. On a alors

$$Ro = \frac{(U^2/L)}{fU} = \frac{U}{fL}$$

Dans l'atmosphère,  $U \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et à l'échelle synoptique ( $L \sim 1000 \text{ km}$ ) typique des perturbations des latitudes moyennes, on a  $Ro \sim 0,1$  donc Coriolis est dominante.

Au contraire, à une échelle plus petite de  $L \sim 10$  km,  $Ro \sim 10$  et Coriolis devient négligeable.

Dans l'océan, les courants sont plus faibles,  $U \sim 10^{-1} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ou moins, et le nombre de Rossby est faible. Coriolis domine même pour des petites échelles ( $L \sim 10$  km) ou des valeurs de  $f$  plus faibles près de l'équateur.

## 7.2. équilibre géostrophique

Dans le cas d'un petit nombre de Rossby, on sera donc proche d'un équilibre appelé *équilibre géostrophique* entre les forces de Coriolis et de pression :

$$\vec{F}_c + \vec{F}_p = \vec{0}$$

La valeur du vent (ou du courant) qui réalise exactement cet équilibre est appelé *vent géostrophique*  $\vec{v}_g$ . On a  $f\hat{k} \wedge \vec{v}_g = \vec{F}_p$  soit

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\rho f} \hat{k} \wedge \text{grad}_z(p) = \frac{g}{f} \hat{k} \wedge \text{grad}_p(Z) \quad (17)$$

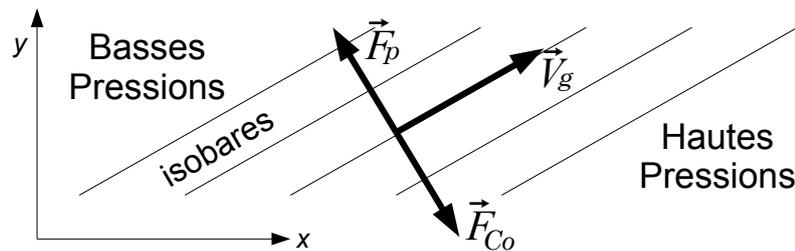


FIGURE 8 – Équilibre des forces dans l'équilibre géostrophique (hémisphère nord)

Comme la force de Coriolis est orthogonale au vecteur vitesse, et opposée à la force de pression, le vent (ou le courant) géostrophique est lui-même orthogonal au gradient de pression donc parallèle aux isobares (figure 8). Dans l'hémisphère nord, Coriolis est à droite du vent donc la force de pression pointe à gauche. Les basses pressions sont donc à gauche du vent ou du courant (loi empirique dite de Buys-Ballot), et à droite dans l'hémisphère sud. La vitesse du vent géostrophique est elle proportionnelle au gradient de pression. L'écart entre le vent réel et le vent géostrophique est de l'ordre de  $Ro$ .

Quand le nombre de Rossby est grand (donc à petite échelle), le vent est simplement accéléré des hautes vers les basses pressions suivant la force de pression.

## 8. Friction en surface, courants d'Ekman

L'autre équilibre important est entre la force de Coriolis et celle exercée par le vent sur la surface. Cette force notée  $\tau$  est en fait une *contrainte* appelée *tension de vent*. Comme la pression, elle s'exprime en Pascals Pa, soit une force par unité de surface. Contrairement à la pression, elle s'exerce de façon tangente à la surface, dans la direction du vent.

L'impact de la tension de vent est significatif près de la surface (couche mélangée de surface dans l'atmosphère : 1 km environ, 50 m dans l'océan). En plus d'induire une circulation moyenne, c'est la principale source des mouvements turbulents de petite échelle de cette couche mélangée.

### 8.1. Océan

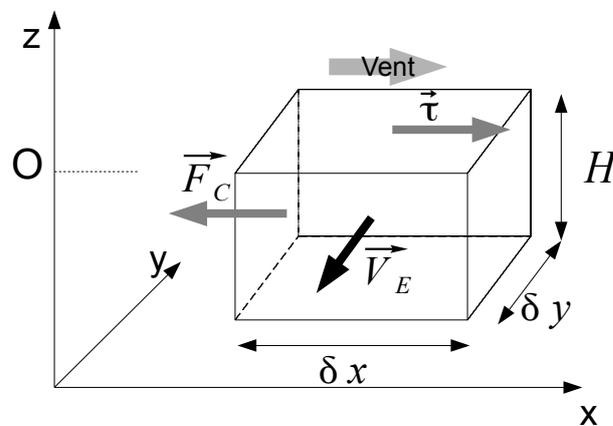


FIGURE 9 – Équilibre des forces expliquant le transport d'Ekman (hémisphère nord).  $\vec{V}_E$  est le flux de masse  $\rho_0 \vec{v}$  intégré sur la profondeur  $H$  de la couche mélangée de surface. Les forces exercées par unité de surface sont la tension de vent  $\vec{\tau}$  et la force de Coriolis  $f\hat{k} \wedge \vec{V}_E$ .

La tension exercée par le vent va être en pratique répartie dans la couche mélangée de surface de l'océan. Son effet sera compensé en moyenne par la force de Coriolis qui s'exerce sur les courants de cette même couche de mélange. Cet équilibre est illustré sur la figure 9.

Quantitativement, on considère une parcelle à la surface de l'océan de profondeur  $H$  correspondant à celle de la couche de mélange, et de surface  $\delta S = \delta x \delta y$ . La force totale exercée par le vent vaut

$$\vec{F}_{\text{vent}} = \vec{\tau} \delta S$$

La force de Coriolis qui s'exerce au total sur cette parcelle vaut

$$\vec{F}_C = -\rho\delta S \int_{-H}^0 f\hat{k} \wedge \vec{v} dz$$

On a ici multiplié par  $\rho\delta S$  pour obtenir une force totale en Newtons (N) à comparer à celle exercée par le vent, pas une force par unité de masse. Il est pratique d'exprimer cette force de Coriolis en fonction du courant intégré sur la profondeur  $H$  :

$$\vec{F}_C = \delta S f \hat{k} \wedge \vec{V}_E$$

$$\vec{V}_E = \int_{-H}^0 \rho \vec{v} dz$$

$\vec{V}_E$  est une *densité de flux de masse*, en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ .

À l'équilibre, la somme de ces deux forces s'annule et on obtient

$$\vec{\tau} - f\hat{k} \wedge \vec{V}_E = 0$$

Ce flux de masse total par les courants de la couche mélangée en équilibre avec la tension de vent est appelé *transport d'Ekman* :

$$\vec{V}_E = -\frac{1}{f}\hat{k} \wedge \vec{\tau} \quad (18)$$

On remarque que ce transport est dirigé à droite du vent dans l'hémisphère nord ( $f > 0$ ). Les courants associés varient (vitesse et direction) suivant la profondeur dans la couche de mélange, mais le transport intégré reste donné par l'équation (18). On peut aussi définir un courant *moyen* (en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) à partir de  $\vec{V}_E$  :

$$\vec{v}_E = \frac{1}{\rho H} \vec{V}_E = -\frac{1}{\rho f H} \hat{k} \wedge \vec{\tau} \quad (19)$$

En plus de ces courants de surface, la tension de vent aura un effet indirect important sur la circulation océanique : les transports d'Ekman vont modifier la hauteur dynamique de la mer et donc le champ de pression (y compris en profondeur), ce qui donnera lieu à une circulation, cette fois en équilibre géostrophique.

## 8.2. Atmosphère

Si l'atmosphère exerce une contrainte  $\vec{\tau}$  sur la surface, elle subit en réaction une contrainte opposée  $-\vec{\tau}$ , qui donnera lieu elle aussi à un transport d'Ekman dans la couche mélangée atmosphérique.

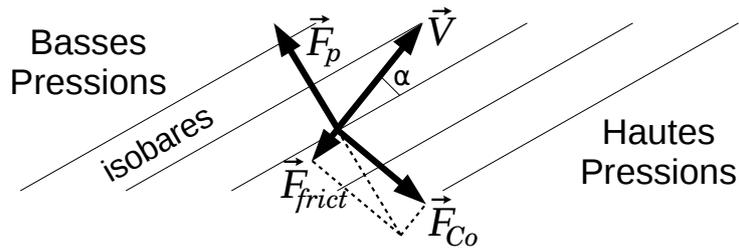


FIGURE 10 – Schéma de l'équilibre des forces dans la couche limite atmosphérique : pression, Coriolis et friction en surface (opposée à la tension de vent). Par rapport à l'équilibre géostrophique (figure 8), le vent moyen acquiert une composante dirigée vers les basses pressions.

Ce transport dans l'atmosphère sera lui à gauche du vent, à cause du signe opposé de la contrainte. Si le vent est lui-même en équilibre géostrophique (voire section 7), le transport d'Ekman sera donc dirigé vers les basses pressions.

Cet équilibre à 3 forces (Coriolis, pression, tension de vent) dans la couche de surface atmosphérique est illustré sur la figure 10.

On notera qu'en terme de flux de masse, les transports d'Ekman  $\vec{V}_E$  dans l'océan et l'atmosphère sont exactement opposés car ils doivent compenser des contraintes en surfaces opposées.

# Troisième partie .

## Vapeur d'eau

### 9. Mesure de la vapeur d'eau

La quantité de vapeur d'eau présente dans l'atmosphère est très variable. On utilise différentes mesures pour la quantifier

- la *pression partielle*  $e$ , qui permet d'utiliser des relations thermodynamiques. L'air étant un gaz parfait, la pression totale vaut  $p_{\text{tot}} = p_{\text{sec}} + e$ . La pression  $p_{\text{sec}}$  est la pression partielle due à l'air sec (tous les autres gaz).
- le *rapport de mélange*

$$r = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m_{\text{air sec}}}$$

Attention, on divise ici par la masse d'air sec et pas la masse totale (même si elles sont proches). L'avantage du rapport de mélange est qu'il sera conservé en l'absence d'évaporation ou condensation, contrairement à la pression partielle. L'ordre de grandeur de  $r$  est de 0 à 20 g/kg. Par conséquent,  $e \ll p$  et  $r \ll 1$ , et on a

$$r \approx \frac{M_{\text{vap}}}{M} \frac{e}{p} = 0,622 \frac{e}{p}$$

### 10. Évaporation, Saturation

#### 10.1. Pression de vapeur saturante

En présence d'eau liquide (ou solide) ayant une surface libre, certaines molécules vont pouvoir s'échapper vers une phase gazeuse. L'échappement étant plus facile pour des molécules ayant une énergie cinétique importante, le *taux d'évaporation* à partir de la surface va dépendre de la température de l'eau (qui mesure l'énergie moyenne).

On aura en parallèle des molécules qui passent de phase gazeuse à liquide. Ce *taux de condensation* va lui dépendre de la pression  $e$  de la phase gazeuse. Il existe donc une valeur de la pression partielle  $e_{\text{sat}}$  pour laquelle il y a équilibre : les taux d'évaporation et de condensation sont égaux.<sup>5</sup>

Si  $e > e_{\text{sat}}$  dans l'atmosphère, la condensation domine et des gouttes d'eau vont se former ou grossir. Si  $e < e_{\text{sat}}$ , l'évaporation domine et  $e$  augmente en présence d'eau liquide. Si il n'y a pas d'eau à évaporer, l'atmosphère reste sous-saturée et le rapport de mélange  $r$  est conservé.

---

5. Cet équilibre est défini pour une interface *plane* entre liquide et gaz. Dans le cas d'une interface très courbée (gouttes microscopiques), le taux d'évaporation augmente.

Les variations de  $e_{\text{sat}}$  avec la température sont données par la formule de Clausius-Clapeyron, qui s'écrit de façon approchée :

$$\frac{1}{e_{\text{sat}}} \frac{de_{\text{sat}}}{dT} = \frac{L}{R_{\text{vap}} T^2} \quad (20)$$

Avec  $R_{\text{vap}} = R^*/M_{\text{vap}}$  la constante des gaz pour la vapeur d'eau et  $L$  la chaleur latente. La forme de  $e_{\text{sat}}$  est proche d'une exponentielle (variations de  $e_{\text{sat}}$  plus rapides que celles de  $L$  ou  $T$ ). Le *rapport de mélange saturant* est naturellement défini par  $r_{\text{sat}} \approx 0,622 e_{\text{sat}}/p$ . L'influence de  $T$  sur  $r_{\text{sat}}$  domine celle de  $p$ , on a donc là aussi essentiellement une dépendance exponentielle à la température.

## 10.2. Distance à la saturation

On définit plusieurs mesures de l'humidité de l'air, non pas en termes absolus mais de distance au seuil de saturation  $r_{\text{sat}}$ . Ces mesures sont souvent plus utiles en pratique.

- *Humidité relative* H.R. =  $r/r_{\text{sat}} = e/e_{\text{sat}}$  (exprimée en pourcentage).
- *Température de rosée*: la température à laquelle la condensation se produit suite à un refroidissement *isobare*. Permet d'anticiper la formation de brouillard ou de...rosée. Pour les températures négatives, on parle de la *température de givre*.
- *Niveau de condensation*: l'altitude ou la pression à laquelle la condensation se produit suite à un refroidissement par *soulèvement adiabatique* (ascendance de parcelles d'air). Il donnera la base des nuages.
- *Température du thermomètre mouillé*, notée  $T'_w$ : température à laquelle la condensation se produit après un refroidissement (isobare) par évaporation de vapeur d'eau. Contrairement à la température de rosée, le rapport de mélange augmente quand  $T$  diminue, en vérifiant  $C_p \delta T = -L \delta r$  (voir équation (25)). C'est une bonne indication du confort thermique (capacité à se refroidir) pendant une canicule pas exemple.

## 10.3. Chaleur latente

On a vu que les molécules qui s'évaporent étaient en général les plus énergétiques. L'évaporation va donc entraîner une diminution de l'énergie du liquide; autrement dit il faut fournir de l'énergie pour évaporer une certaine quantité d'eau. La quantité nécessaire est mesurée par la *chaleur latente*  $L$ : pour un changement  $dm_{\text{vap}}$  de vapeur d'eau, on a un apport de chaleur

$$\delta Q = -L dm_{\text{vap}}$$

La chaleur latente dépend faiblement de la température. Elle vaut  $L = 2,5 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  à  $0^\circ\text{C}$ .

## Ébullition

L'évaporation à la surface d'eau liquide se produit donc à n'importe quelle température, à condition que l'air ne soit pas saturé.

L'ébullition est un cas particulier : des bulles de gaz se forment à l'*intérieur* du liquide bouillant. Dans le cas de l'eau, ce gaz est donc de la vapeur d'eau. La pression dans ces bulles est égale à celle du liquide, soit à peu près la pression atmosphérique si le liquide est en contact avec l'air. Les bulles sont d'autre part stables si leur pression est supérieure à la pression saturante. L'ébullition se produit donc à une température  $T_b$  telle que

$$e_{\text{sat}}(T_b) = p_{\text{atm}}$$

# Quatrième partie .

## Thermodynamique et énergie

### 11. Premier principe de la thermodynamique

Une parcelle de fluide possède, en plus de son énergie d'ensemble (cinétique, potentielle), une *énergie interne*  $U$ . L'énergie interne mesure l'énergie moyenne des molécules: énergie cinétique ("d'agitation"), proportionnelle à la température, mais aussi énergie de rotation, vibration, ou leur énergie potentielle d'interaction. L'énergie interne est une *fonction d'état*: c'est une fonction des variables thermodynamique décrivant le système, température et pression ou équivalent.

Le premier principe de la thermodynamique énonce que les variations d'énergie interne de la parcelle sont égales à la somme du travail et de la chaleur reçus:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

D'autre part, pour des transformations quasi-statiques (lentes par rapport à l'ajustement de la pression), le travail reçu est celui des forces de pression lors d'une compression ou dilatation:

$$\delta W = -p dV$$

où  $p$  est la pression de la parcelle (égale à celle de l'environnement dans l'hypothèse quasi-statique).

Pour l'étude de l'atmosphère ou l'océan il est plus simple de s'intéresser à des transformations à pression plutôt qu'à volume constant. On utilise donc plutôt l'*enthalpie*  $H = U + pV$ <sup>6</sup>. On a alors

$$dH = dU + d(pV) = V dp + \delta Q$$

où on a utilisé  $\delta W = -p dV$ .

#### 11.1. Chaleurs molaire et massique

On définit la *chaleur molaire* comme la quantité de chaleur à apporter pour augmenter la température d'un fluide. On distingue la chaleur molaire pour des variations à *volume constant* (*isochore*)

$$c_v^* = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_v$$

---

6. Le terme  $pV$  est le travail nécessaire pour "libérer" le volume  $V$  occupé à la pression  $p$ .

où  $n$  est le nombre de moles dans la parcelle, et pour des transformations à *pression constante (isobare)*

$$C_p^* = n \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p$$

La *chaleur massique* est exprimée par unité de masse au lieu du nombre de moles : on a

$$C = \frac{C^*}{M}$$

où  $M$  est la masse molaire du fluide.

En utilisant le premier principe, on voit que pour une transformation isochore

$$(dU)_V = \delta Q = nC_v^* dT$$

et pour une transformation isobare

$$(dH)_p = \delta Q = nC_p^* dT$$

## 11.2. Cas du gaz parfait

Dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie potentielle d'interaction des molécules du gaz est négligeable, et l'énergie interne dépend uniquement de la température. On peut montrer que

$$U = n \frac{\nu}{2} R^* T$$

où  $\nu$  est le nombre de *degrés de liberté* des molécules. Pour un gaz (principalement) diatomique comme l'air,  $\nu = 5$  (3 degrés de translation et 2 de rotation).

On a alors

$$dU = n \frac{\nu}{2} R^* dT$$

pour une transformation quelconque. En considérant le cas d'une transformation isochore, on obtient que  $C_v^* = \frac{\nu}{2} R^*$ . On écrira simplement que

$$U = nC_v^* T$$

De même, en utilisant que  $d(pV) = nR^* dT$  (relation des gaz parfaits), l'enthalpie est égale à  $H = n(C_v^* + R^*) dT$ . Le cas d'une transformation à pression constante amène alors la *relation de Mayer* :

$$C_p^* = C_v^* + R^* = \frac{(\nu + 2)}{2} R^*$$

Et l'enthalpie s'écrit de façon générale

$$H = nC_p^* T$$

## 12. Transformations et énergie dans l'atmosphère

Les résultats précédents ont montré que

$$dH = nC_p^* dT = V dp + \delta Q$$

pour une transformation quelconque d'une parcelle d'air (considéré comme un gaz parfait). En divisant cette relation par la masse  $m$  de la parcelle, on obtient

$$dh = C_p dT = \frac{dp}{\rho} + \delta q$$

Avec  $h$ ,  $\delta q$  l'enthalpie et la chaleur reçue *massiques* et  $C_p = C_p^*/M$  la chaleur massique de l'air. On a  $C_p = 7R/2 = 1004 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ . La version du premier principe utilisée sera donc :

$$C_p dT - \frac{dp}{\rho} = \delta q \quad (21)$$

### 12.1. Transformation adiabatique

Les échanges de chaleur d'une parcelle d'air avec son environnement peuvent s'effectuer par :

- Transfert radiatif : l'atmosphère se refroidit en émettant dans l'infrarouge. Ces échanges sont lents par rapport au déplacement des parcelles<sup>7</sup>
- Condensation ou évaporation d'eau : a lieu uniquement quand l'air est à saturation.
- Les échanges par diffusion moléculaire (ou mélange turbulent) sont négligeables sauf près du sol.

On pourra donc souvent considérer que l'évolution de la parcelle est adiabatique, soit  $\delta q = 0$ .

En utilisant la relation des gaz parfaits (1), l'équation de l'enthalpie (21) devient :

$$C_p dT - \frac{RT}{p} dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0$$

On note  $\kappa = R/C_p$ . On obtient en intégrant :  $T \cdot p^{-\kappa} = \text{cste}$  : cette relation donne la variation de température dans le cas d'une détente ( $T$  diminue) ou compression ( $T$  augmente) adiabatique.

On définit alors la *température potentielle*  $\theta$  par :

$$\theta = T \cdot \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\kappa} \quad (22)$$

---

7. Le refroidissement/réchauffement peut être localement élevé au sommet/à la base de nuages.

où  $p_0$  est une pression de référence égale à 1000 hPa.  $\theta$  est égale à la température d'une parcelle ramenée de façon adiabatique à une pression  $p_0$ .  $\theta$  a donc la dimension d'une température (on l'exprime en kelvin), et est conservée au cours de transformations adiabatiques.

## 12.2. Conservation de l'énergie statique

En utilisant l'équilibre hydrostatique, l'équation (21) devient :

$$C_p dT + g dz = \delta q$$

On utilise ici que les variations de pression d'une parcelle sont essentiellement dues à ses déplacements verticaux.

### 12.2.1. Gradient adiabatique

En l'absence de chauffage (transformation adiabatique), une parcelle qui se déplace verticalement (et donc voit sa pression diminuer) se refroidit donc suivant

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{adiab}} = -g/C_p \quad (23)$$

On parle de *gradient adiabatique* (sec), qui donne un refroidissement de 10°C par km d'élévation. Attention, il s'agit de la variation de température d'une parcelle, le profil de température décroît en pratique un peu moins vite.

### 12.2.2. Énergie statique

En intégrant l'équation précédente pour une transformation adiabatique, on obtient que

$$e_s = C_p T + gz = \text{cste} \quad (24)$$

$e_s$  est l'*énergie statique*, qui est donc conservée dans des conditions adiabatiques. L'énergie statique est la somme de l'enthalpie et de l'énergie potentielle de gravitation par unité de masse<sup>8</sup>. La conversion entre énergie potentielle et enthalpie au cours de déplacements verticaux est due à la compression du fluide. Les variations ou différences de  $e_s$  et  $\theta$  sont reliées par :

$$de_s = C_p T d \ln \theta$$

---

8. L'énergie cinétique  $e_c$  est négligeable. Typiquement,  $\delta e_c = 50 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (variation de  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $\delta e_s = 10\,000 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (variation de 1000 m ou 10°C)

### 12.3. Transformations pseudo-adiabatiques, énergie statique humide

Dans le cas de déplacements verticaux, l'hypothèse adiabatique ne sera plus valide quand la parcelle dépasse son niveau de condensation. On aura alors un dégagement de chaleur latente. Cet apport de chaleur du à la condensation ou l'évaporation de vapeur d'eau s'écrit  $\delta Q = -L dm_{\text{vap}}$ .

On peut alors utiliser l'hypothèse pseudo-adiabatique, qui suppose que toute la chaleur est échangée avec l'air sec :

- La chaleur latente dégagée n'est pas utilisée pour chauffer l'eau (liquide ou vapeur) présente.
- On considère une masse d'air sec constante et on néglige les pertes de masse par précipitation.

On a alors

$$\delta q = -\frac{L dm_{\text{vap}}}{m_{\text{sec}}} = -L dr$$

En l'absence d'autres échanges de chaleur, l'équation (21) devient :

$$C_p dT - \frac{dp}{\rho} + L dr = 0 \quad (25)$$

Et en intégrant il vient

$$e_h = e_s + Lr = C_p T + gz + Lr = \text{cste} \quad (26)$$

La quantité  $e_h$  est appelée *énergie statique humide*, c'est la somme de l'énergie statique et d'une *énergie latente* par unité de masse  $Lr$ . Elle est conservée à la fois pour des transformations purement adiabatiques sans changement de phase ( $r$  et  $e_s$  sont alors séparément conservés) ou pour des transformation d'air saturé (pseudo-adiabatiques) : on a alors une conversion entre énergie statique et latente.

## 13. Transformations dans l'océan

Comme l'équation d'état, l'énergie interne dans l'océan a une forme plus complexe que celle d'un gaz parfait : les molécules d'eau ont également une forte énergie potentielle d'interaction, qui en plus ne dépend pas seulement de la température mais aussi par exemple de la salinité.

En négligeant les effets de composition, la forme générale de la variation d'enthalpie d'une parcelle est :

$$dH = \delta Q + V dp = nC_p^* dT + V(1 - \beta_T T) dp$$

où  $\beta_T$  est le coefficient de dilatation thermique<sup>9</sup> En divisant par la masse de la parcelle, on arrive alors à l'équation suivante :

$$C_p dT - \frac{\beta_T T}{\rho} dp = \delta q$$

On peut d'autre part trouver les variations de  $\rho$  à partir de la fonction d'état :

$$d\rho - \beta_p \rho dp = \delta\rho_{\text{diab}}$$

Les termes au second membre de ces 2 équations donnent l'impact des échanges diabatiques: apports de chaleur ou changements de salinité.

Comparé au cas de l'atmosphère, l'océan est très peu compressible (on a  $\beta_T T \ll 1$ , alors que  $\beta_T T = 1$  pour un gaz parfait). Si on est adiabatique,  $\rho$  et  $T$  vont donc être approximativement conservés, et l'énergie totale sera proche de l'enthalpie  $C_p T$ <sup>10</sup>. L'énergie potentielle  $gz$  n'apparaît pas car elle est découplée de l'énergie interne<sup>11</sup>.

---

9. Cette relation est aussi valable pour un gaz parfait mais se simplifie car on a alors  $\beta_T = 1/T$

10. Toujours à cause de la faible compressibilité, les chaleurs massiques à pression ou volume constant sont presque identiques

11. Pour des grandes variations de profondeur – donc de pression – on effectue des petites corrections sur la densité ou la température des parcelles

# Cinquième partie .

## Bilans d'eau et d'énergie

### 14. Introduction, définitions

Beaucoup de quantités d'intérêt pour l'atmosphère et l'océan obéissent à des *lois de conservation*. Il en existe pour l'énergie, la quantité de mouvement, mais aussi la composition: salinité, quantité de vapeur d'eau ou autre composant. Ces lois prennent la forme générique

$$\text{Évolution} = \text{Flux net (entrant)} + \text{Sources} - \text{Puits} \quad (27)$$

L'évolution s'exprime comme une dérivée temporelle  $\partial/\partial t$ . On peut avoir des formes locales (évolution de la valeur en un point) ou intégrées sur un certain volume.

#### 14.1. Flux et densité de flux

Un *flux*  $\Phi$  (de chaleur, d'énergie, de matière...) désigne une quantité échangée à travers une surface donnée par unité de temps. Il s'agit d'une quantité intégrée: le flux s'exprimera en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$  (flux de masse), en  $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$  (ou Watts, flux d'énergie) etc. Les mécanismes physiques sous-jacents peuvent être très variés: par exemple un flux d'énergie peut être par rayonnement, par conduction, par la puissance d'une force...

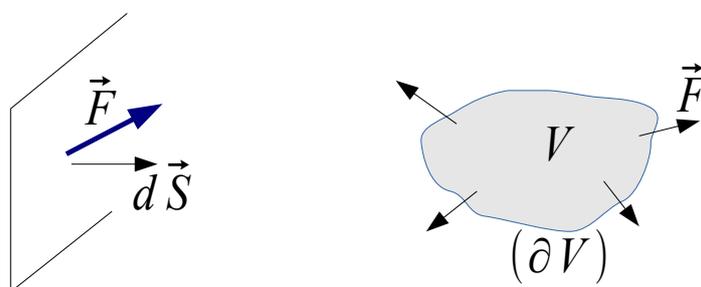


FIGURE 11 – (a, gauche) : densité de flux à travers une surface élémentaire orientée .(b, droite) : calcul du flux total sortant d'un volume  $V$  délimité par une surface  $\partial V$

Plutôt que le flux intégré, les lois physiques donnent souvent la valeur de la *densité de flux*  $\vec{F}$ , qui est un flux par unité de surface (exprimé en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ,  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  etc) et est donc une valeur locale.

Le flux élémentaire traversant une surface  $d^2S$  de normale unitaire  $\vec{n}$  vaut alors (figure 11a)

$$d\Phi = \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Le flux total se retrouve alors en intégrant sur toute la surface  $S$  concernée :

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d^2S$$

Lorsque cette surface délimite un certain volume fini  $V$  (figure 11b), il est souvent pratique de diviser le flux total par le volume pour se ramener à une évolution locale. On a alors

$$\frac{\Phi}{V} \approx \text{div } \vec{F}$$

Cette relation (qui est aussi une définition intrinsèque de la divergence) est valide quand le volume n'est pas trop grand.

Par abus de langage, la densité de flux est souvent appelée simplement « flux » ; il faut donc toujours être prudent au sujet des dimensions d'un flux, et vérifier qu'on retrouve à la fin les bonnes unités...

## 15. Transport

Quand le flux est du au déplacement de parcelles fluides, on parlera également de *transport*. La densité de flux de masse s'exprime alors par le vecteur

$$\vec{F} = \rho \vec{v}$$

Où  $\vec{v}$  est la vitesse du fluide (unités  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ).

Si on s'intéresse (par exemple) au flux d'énergie transporté par ces parcelles, on utilisera leur énergie par unité de masse  $e$ . La densité de flux d'énergie vaut alors

$$\vec{F}_e = \rho \vec{v} e$$

et le flux d'énergie à travers une surface élémentaire

$$d\Phi_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{S}$$

On procède de même pour d'autres quantités : contenu en eau, quantité de mouvement etc. On commence par les exprimer par unité de masse (pour l'eau : rapport de mélange en  $\text{kg}/\text{kg}$ ) puis on multiplie par le flux de masse  $\vec{F}$ . Pour retrouver le flux total il faut intégrer sur la surface considérée.

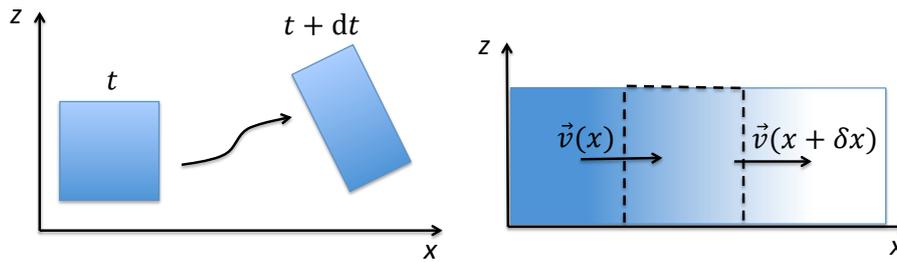


FIGURE 12 – Points de vue Lagrangien (gauche) et Eulerien (droite) pour l'évolution d'une quantité (représentée par la couleur bleue) dans un certain volume. Lagrangien : on suit le même fluide, qui se déplace et se déforme au cours du temps. Le contenu total est inchangé si il n'y a pas de source ou puit à l'intérieur du volume. Eulerien : le volume délimité par la ligne pointillée est fixe. Du fluide rentre et sort par les bords à la vitesse  $v$ . Ici, on voit que la quantité dans le volume va augmenter, le fluide entrant à gauche ayant une concentration plus grande.

## 15.1. Points de vue Lagrangien et Eulerien

Il y a deux grandes façons de considérer l'évolution d'une certaine quantité dans un fluide (ou un solide d'ailleurs), qui vont aussi changer la façon d'exprimer les transports.

### Lagrangien

Dans le point de vue Lagrangien, on s'intéresse à un certain volume de fluide, qu'on suit lors de ses mouvements au cours du temps (figure 12a). Il s'agit alors toujours du « même » fluide, mais sa position et sa forme peuvent changer. Il n'y a donc pas de flux de masse à travers les bords. On parle de *volume matériel*.

La plupart des lois de conservation s'expriment d'abord avec ce point de vue Lagrangien : c'est le même fluide qui conserve son énergie, sa composition etc. La formulation Lagrangienne est aussi adaptée aux techniques d'observation où la mesure est effectuée sur des plateformes dérivantes : ballons, bouées...

### Eulérien

Le point de vue Eulerien s'intéresse à une évolution *locale* (en un point fixe au cours du temps) ou à l'intérieur d'un *volume géométrique* (dont les limites sont fixes). On a alors du fluide qui rentre et sort à travers les bords du volume, et on aura un terme de transport qui va faire évoluer la quantité contenue dans ce volume (figure 12b).

Le point de vue Eulerien est souvent celui qui nous intéresse in fine : on veut connaître une évolution locale et non en suivant une masse d'air ou d'eau. Il est également adapté aux mesures fixes (stations, mouillages, satellites...) et est adopté dans la plupart des modèles numériques.

## 15.2. Transport horizontal intégré

Dans l'atmosphère et l'océan, on distinguera souvent les flux et transports

- Verticaux (à travers une surface horizontale), les 2 cas particuliers intéressants étant la surface (échanges atmosphère–continent ou atmosphère–océan) et le sommet de l'atmosphère.
- Horizontaux (à travers une surface verticale), effectués par le vents et le courant horizontal.

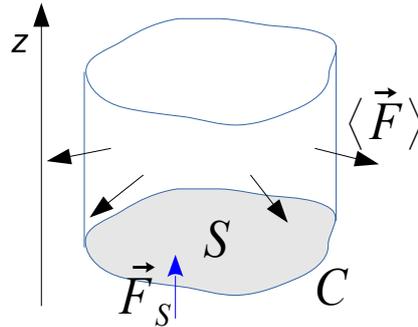


FIGURE 13 – Calcul du flux total latéral (horizontal) vers une région délimitée par une surface  $S$  :

On intègre d'abord la densité de flux horizontale  $F$  sur la verticale pour trouver  $\langle \vec{F} \rangle$ , puis on intègre le long du contour  $C$  qui délimite  $S$ . Ce transport horizontal va équilibrer le flux de surface qui vaudra ici  $F_s S$ .

Dans le cas des transports horizontaux, il sera souvent utile de commencer par faire une intégrale verticale (sur la profondeur de l'océan, de l'atmosphère ou les 2). On notera cette densité de flux intégrée :

$$\langle \vec{F} \rangle = \int_z \vec{F} dz$$

Cette intégrale est un flux par unité de longueur ( sur l'horizontale) qui s'exprime donc en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Pour calculer un flux total entrant ou sortant *latéralement* d'une certaine région, définie par sa surface au sol  $S$  de contour  $C$  (figure 13), on devra faire également l'intégrale sur le tour de cette région :

$$\phi = \oint_C \langle \vec{F} \cdot \vec{n} \rangle dl$$

où  $\vec{n}$  est la normale locale (horizontale) au contour  $C$  ; on obtient un flux net sortant si  $\vec{n}$  est dirigé vers l'extérieur.

On aura en pratique souvent besoin d'exprimer cet export latéral par unité de surface horizontale  $S$ , pour pouvoir le comparer à la densité de flux *en surface* à travers  $S$ . On aura alors la relation locale<sup>12</sup>

$$\frac{\phi}{S} \approx \text{div}(\vec{F})$$

La divergence est ici calculée en 2 dimensions horizontales. Attention, cette divergence du flux intégré s'exprime en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$  mais ce n'est pas une densité de flux ! (Ne pas confondre sur le cas de la figure 13 le flux en surface à travers  $S$  et le flux latéral entrant par les parois du cylindre défini par  $S$ ).

## 16. Bilans moyens

On cherche souvent à faire des bilans en moyenne climatique (temporelle) sur une région particulière. On a alors plusieurs subtilités. D'abord, le terme d'évolution tend vers 0 sur le long terme (normalement assez vite dans l'atmosphère, moins dans l'océan où il peut y avoir plus de stockage).

En particulier, le flux de masse net entrant dans une région vaut assez vite 0 en moyenne (si il y a une accumulation de masse, la pression va aussi augmenter et tendre à la faire sortir).

Cependant, un flux de masse nul ne veut pas dire que le flux total d'autres quantités comme l'énergie ou le contenu en eau est nul aussi: on a en général un transport horizontal qui va compenser les flux en surface ou au sommet de l'atmosphère (pour l'énergie).

Il est alors utile de distinguer un flux de masse *entrant* dans la région  $\Phi_M$  (ce flux est compté seulement quand la vitesse au bord  $\vec{v}$  est dirigée vers l'intérieur de la région) et un flux de masse sortant  $-\Phi_M$  (qui doit être exactement opposé en moyenne, mais n'a pas lieu au même endroit).

Pour calculer le flux moyen net entrant d'une autre quantité, par exemple la vapeur d'eau, dont la densité de flux est  $\vec{F}_v = r\vec{F}$  avec  $r$  le rapport de mélange, on peut alors écrire que

$$\Phi_v = \Phi_M (r_{\text{in}} - r_{\text{out}})$$

où  $\Phi_M$  est le flux de masse entrant (ou sortant), et  $r_{\text{in}}$  et  $r_{\text{out}}$  sont respectivement le rapport de mélange moyen de l'air entrant et de l'air sortant.

Cette décomposition permet une compréhension des mécanismes de transport en séparant les rôles de l'intensité des échanges de masse, et des différences d'humidité (ou d'une autre quantité transportée) entre air entrant et sortant. Elle met en évidence qu'on peut avoir un transport net (d'eau, d'énergie...) non nul par *échange* de parcelles

---

12. Pour des grandes régions dans lesquelles les densités de flux en surface ne sont pas homogènes, on comparera plutôt les flux intégrés

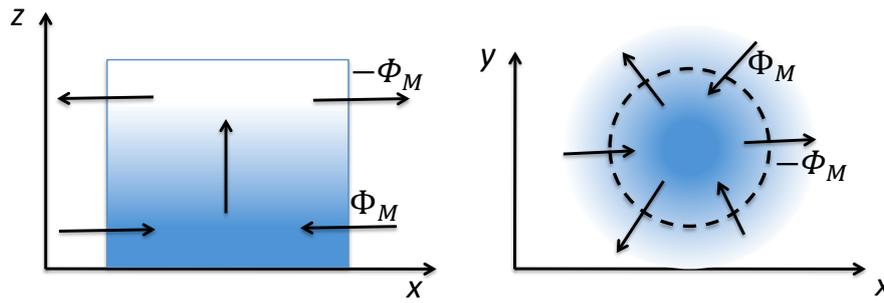


FIGURE 14 – Exemples de transport net d’une quantité (vapeur d’eau par exemple, ici représentée en bleu) vers une région donnée, avec un flux de masse net nul. (1) Région ascendante (gauche, coupe verticale). On a un flux de masse  $\Phi_M$  entrant dans les basses couches, et un flux opposé sortant dans les hautes couches. Par continuité, on doit avoir une ascendance dans la colonne. Comme les basses couches sont plus humides, on a un import net de vapeur d’eau  $\Phi_M (r_{\text{bas}} - r_{\text{haut}})$ . (2) Échanges horizontaux (droite, vue de dessus). Ici aussi, on a de l’air entrant et sortant de la région délimitée par les pointillés, mais aucun flux de masse net. Comme l’air entrant est ici plus sec, on aura un export net de vapeur.

ayant des caractéristiques différentes. 2 exemples sont montrés sur la figure 14, où les transports entrants et sortants ont lieu à différents endroits sur la verticale ou sur l’horizontale.