

2. EQUATIONS DE LA CIRCULATION OCÉANIQUE

2.1 Les équations du mouvement

La formulation mathématique de la dynamique de l'océan et de l'atmosphère s'exprime au travers des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'une équation d'état et des lois de la thermodynamique. En coordonnées eulériennes, la vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ d'une particule fluide, la pression p , la densité ρ , la température T et, le cas échéant, la salinité S sont considérées comme des fonctions de la position \mathbf{r} de la particule par rapport au centre de la terre, et du temps t .

En l'absence de source ou de puits de masse dans le fluide, la conservation de la masse est donnée par l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

qui exprime que le taux de variation de la densité est compensé par une divergence du flux de masse $\rho \mathbf{u}$. Sauf pour l'étude des ondes acoustiques, on peut considérer l'océan comme incompressible, ce qui revient à imposer que la vitesse est non divergente (e.g. Gill 1982 ; Pedlosky 1987)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Cette relation filtre les ondes acoustiques. Dans un système de coordonnées en rotation uniforme Ω , $|\Omega| = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega \wedge \mathbf{u} \right) - \rho (\mathbf{g} - \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})) - \nabla p = \rho \mathbf{F} \quad (2.3)$$

où $\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée totale (ou matérielle) par rapport au temps en suivant la particule fluide, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81$ m/s), \mathbf{F} la force de masse (potentiel générateur des marées, frottements turbulents et moléculaires, ...), $2\Omega \wedge \mathbf{u}$ représente la force de Coriolis et $\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{r})$ la force centrifuge. Le rapport de la force centrifuge à la force de pesanteur est très petit et ce terme est généralement négligé.

L'eau de mer est une solution chimique complexe où la salinité S représente la mesure de substances solides dissoutes par unité de masse d'eau. La densité de l'eau de mer est liée à la pression, la température et la salinité par une équation d'état

$$\rho = \rho(p, T, S) \quad (2.4)$$

de forme analytique complexe. Deux équations complémentaires expriment la conservation de la chaleur et de la salinité. A partir de la conservation de l'entropie, on peut établir l'équation approchée pour la température :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \alpha T \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (2.5)$$

où C_p est la chaleur spécifique, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p$ le coefficient d'expansion thermique et \mathbf{h} le flux de chaleur dû à la diffusion moléculaire et à l'absorption de radiation. Les effets de la compressibilité dans (5) interviennent principalement à grande profondeur, mais ils peuvent être pris en compte par l'introduction de la température potentielle θ (température qu'aurait une particule d'eau si elle était amenée adiabatiquement à la surface). En remplaçant dans (5), on a

$$\frac{T}{\theta} \rho C_p \frac{d\theta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (2.6)$$

La conservation de la salinité est donnée par

$$\rho \frac{dS}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (2.7)$$

où S est le flux de densité de sel (masse/unité de surface et de temps) provenant de sources extérieures : évaporation, pluie et diffusion. La diffusion moléculaire est faible et peut souvent être négligée. On notera que la diffusivité de la salinité est 100 fois plus faible que celle de la température, ce qui donne lieu à divers phénomènes de petite échelle (doigts de sel, double diffusion).

En combinant (3), (6) et (7), la conservation de la densité potentielle s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{m} \quad (2.8)$$

où \mathbf{m} représente le flux de densité potentielle.

2.2 Approximation de Boussinesq

Dans l'océan, la densité ρ varie principalement avec la profondeur, mais de moins de 2%. Certains mouvements ne sont pas influencés par les changements de ρ (ex : ondes de surface). D'autres peuvent être analysés simplement en considérant un océan à 2 couches de densité constante, avec interface à la thermocline. Lorsqu'on doit tenir compte plus précisément de la stratification, on applique le plus souvent l'approximation de Boussinesq, qui simplifie quelque peu les équations. Cette approximation est aussi utilisée pour

l'atmosphère. Soit un état de référence au repos de densité constante ρ_0 (e.g. la densité moyenne) en l'absence de forces extérieures. On a alors

$$\partial_3 p_r + \rho_0 g = 0 \quad (2.9)$$

qui exprime l'équilibre hydrostatique : la pression varie linéairement avec la profondeur. Si l'on soustrait (9) de (3), on trouve

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega\Lambda\mathbf{u} \right) - \hat{\rho}\mathbf{g} + \nabla\hat{p} = 0 \quad (2.10)$$

avec $\hat{p} = p - p_r$, $\hat{\rho} = \rho - \rho_r$. Comme ρ varie très peu, on peut remplacer ρ par ρ_0 partout, excepté dans le terme $\hat{\rho}\mathbf{g}$, ce qui donne :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega\Lambda\mathbf{u} - \frac{\hat{\rho}\mathbf{g}}{\rho_0} + \frac{\nabla\hat{p}}{\rho_0} = 0 \quad (2.11)$$

On introduit souvent la poussée par unité de volume b en posant

$$\hat{b} = -\frac{\hat{\rho}\mathbf{g}}{\rho_0} \quad (2.12)$$

ce qui fait que (11) s'écrit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\Omega\Lambda\mathbf{u} - \hat{b}\mathbf{e}_3 + \frac{\nabla\hat{p}}{\rho_0} = 0 \quad (2.13)$$

où \mathbf{e}_3 est le vecteur vertical unitaire. Notons que $\hat{b}\mathbf{e}_3$ agit comme une force de rappel en milieu stable, vu que si une particule est déplacée de sa position d'équilibre, la force de poussée tend à l'y ramener.

A l'interface océan-atmosphère dont la position est spécifiée par $\eta(x_1, x_2, t)$, la *condition aux limites cinématique* exprime qu'en l'absence de déferlement, une particule située à l'interface doit y rester. Si $x_3 - \eta(x_1, x_2, t) = 0$ est l'équation de l'interface, on a alors:

$$\frac{d}{dt}(x_3 - \eta) = 0 \quad \text{en } x_3 = \eta$$

ou, par définition,

$$\frac{d}{dt}\eta = u_3 \quad \text{en } x_3 = \eta \quad (2.14)$$

La *condition aux limites dynamique* exprime le fait que la pression ne peut varier à l'interface qu'en raison des effets de la tension superficielle, négligeables à grande échelle, ce qui donne

$$p = p^a \quad \text{en } x_3 = \eta \quad (2.15)$$

où p^a est la pression atmosphérique à l'interface. Au fond la vitesse normale à une paroi solide doit s'annuler

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } x_3 = -h(x_1, x_2) \quad (2.16)$$

où h est la profondeur.

Pour les mouvements de petite amplitude, on peut exprimer les conditions aux limites non linéaires (14) et (15) en fonction des conditions en $x_3 = 0$ (surface libre non perturbée) par un développement en série de Taylor. A l'ordre un en les perturbations, on a, dans l'approximation de Boussinesq, et en négligeant la tension superficielle,

$$\partial_t \eta = u_3(0)$$

$$p_r(0) + \eta \partial_3 p_r(0) + \dots + \hat{p}(0) + \dots = p^a(0)$$

ou encore, en utilisant la relation hydrostatique (9) et en négligeant les variations de pression atmosphérique, en $x_3 = 0$

$$\partial_t \eta = u_3$$

$$\hat{p} - \rho_0 g \eta = 0 \quad (2.17)$$

Ces équations seront utilisées par la suite en omettant les chapeaux, comme c'est l'usage. Il faudra cependant se rappeler que, dans l'approximation de Boussinesq, ρ est l'écart de la densité par rapport à ρ_0 et p l'écart de la pression par rapport à p_r . Il est utile de considérer le bilan énergétique de l'océan. Pour cela, on utilise l'identité vectorielle

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right)$$

et on multiplie (11) par \mathbf{u} , ce qui donne

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{p}}{\rho_0} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) + \frac{\hat{p}}{\rho_0} g u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \quad (2.18)$$

ou, en remplaçant u_3 par $\frac{d\xi}{dt}$ et en utilisant (8) et la condition d'incompressibilité

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g \xi \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(p + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g \xi \right) \right] = \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - g \xi \nabla \cdot \mathbf{m} \quad (2.19)$$

Le taux de variation de la densité d'énergie cinétique plus potentielle est équilibré par la divergence du flux d'énergie et le travail des forces extérieures et des forces de friction. Soit un élément de volume dV . En intégrant sur le volume de l'océan et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient la relation

$$\partial_t \iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g \xi \right) dV + \iint_S \mathbf{u} \left(p + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g \xi \right) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V (\rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - g \xi \nabla \cdot \mathbf{m}) dV$$

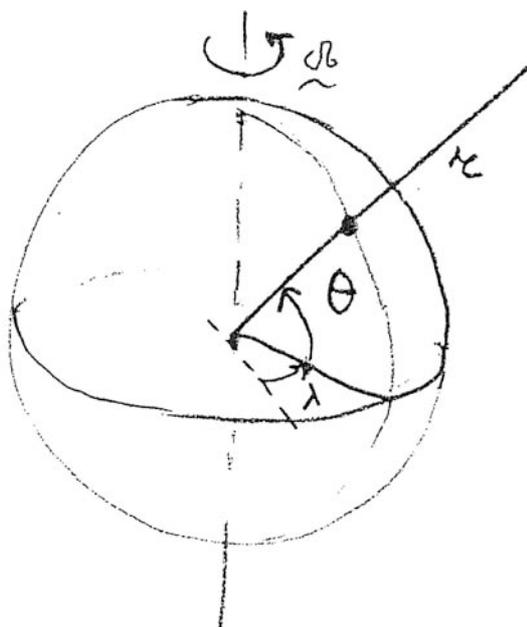
où S est la surface libre de l'océan. En équilibre stationnaire, le taux de transfert de l'énergie à travers l'interface air-mer est égal au taux de production et de dissipation à l'intérieur de

l'océan. L'apport d'énergie intervient essentiellement à grande échelle spatiale (celle du vent) et la dissipation à l'échelle moléculaire. Il y a donc d'importants transferts d'énergie des grandes aux petites échelles par les mouvements océaniques. En état stationnaire, non forcé et non dissipatif, la fonction de Bernoulli est conservée le long du mouvement

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(p + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \rho g \xi \right) = 0 \quad (2.20)$$

2.2 Les équations primitives

Pour représenter les phénomènes à l'échelle planétaire, on doit travailler en coordonnées sphériques (λ, θ, r) où λ est la longitude, θ la latitude et $r = a + z$ la distance au centre de la terre, a étant le rayon moyen. Nous utiliserons ici une forme légèrement simplifiée où a est constant. Nous négligerons en outre la composante horizontale du vecteur rotation, ce qui est valable pour pratiquement tous les cas traités ici (voir Pedlosky 1987). Cela revient à poser $2\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, f)$ avec $f = 2\Omega \sin\theta$, où f est le paramètre de Coriolis. Si (u, v, w) sont les composantes de la vitesse, on a dans l'approximation de Boussinesq



$$\frac{du}{dt} - \left(f + \frac{u \tan \theta}{a}\right) v + \frac{uw}{a} + \frac{1}{a \cos \theta} \partial_{\lambda} \pi = F_{\lambda} \quad (2.21)$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(f + \frac{u \tan \theta}{a}\right) u + \frac{vw}{a} + \frac{1}{a} \partial_{\theta} \pi = F_{\theta} \quad (2.22)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} + \partial_z \pi + \frac{g\rho}{\rho_0} = F_z \quad (2.23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{a \cos \theta} (\partial_{\lambda} u + \partial_{\theta} (v \cos \theta)) + \partial_z w + \frac{2w}{a} = 0 \quad (2.24)$$

avec

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{u}{a \cos \theta} \partial_{\lambda} + \frac{v}{a} \partial_{\theta} + w \partial_z \quad (2.25)$$

où $\pi = p/\rho_0$.

Ces équations peuvent être simplifiées en faisant l'*approximation hydrostatique*, qui est presque toujours valable à grande échelle. Pour cela, on fait l'analyse dimensionnelle des équations ci-dessus, en introduisant l'échelle verticale H du mouvement ($H < h$, profondeur), l'échelle de vitesse horizontale U et l'échelle de vitesse verticale W . Pour les mouvements à grande échelle, on a

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (\text{rapport d'aspect})$$

où L est l'échelle horizontale du mouvement et T son échelle temporelle. On définit également $R_o = U/fL$ (nombre de Rossby), le rapport entre les termes d'advection non linéaire et le terme de Coriolis. Sauf pour les petites échelles, on a $R_o \ll 1$. Si les mouvements varient au cours du temps, d/dt est dominé par ∂_t et le nombre de Rossby est également défini par $R_o = 1/fT$. La circulation océanique varie à grande échelle et basse fréquence, et on a le plus souvent $R_o \ll 1$. On pourrait de même définir l'importance de la dissipation. Cependant, celle-ci est généralement faible et ne sera considérée qu'ultérieurement.

L'analyse dimensionnelle se fait soit en non-dimensionnalisant les équations qu'on développe ensuite en fonction des petits paramètres, soit en comparant l'ordre de grandeur des différents termes, en utilisant

$$\frac{1}{a \cos \theta} \partial_{\lambda} \sim \frac{1}{L}, \frac{1}{a} \partial_{\theta} \sim \frac{1}{L}, \partial_t \sim \frac{1}{T}$$

les termes successifs de (21), (22) sont de l'ordre

$$\frac{U}{T}, \frac{U^2}{L}, \frac{UW}{H}; (f + \frac{U}{a} \tan \theta) U; \frac{UW}{a}; \frac{P}{L}$$

où P est l'échelle de π . D'autre part, les termes de l'équation d'incompressibilité (24) sont d'ordre

$$\frac{U}{L}; \frac{U}{L}; \frac{W}{H}; \frac{W}{a}$$

Vu $H \ll a$, le dernier terme est négligeable et on a que W est au plus d'ordre UH/L . Dès lors, à l'ordre le plus bas en l'un ou l'autre des petits paramètres (qui sont considérés être d'un ordre ε comparable) il y a *équilibre géostrophique* dans (21) et (22), c'est à dire que seul le terme de gradient de pression peut balancer l'accélération de Coriolis :

$$-fv + \frac{1}{a \cos \theta} \partial_{\lambda} \pi = 0$$

$$fu + \frac{1}{a} \partial_{\theta} \pi = 0 \quad (2.26)$$

L'équilibre géostrophique ne donne qu'une relation diagnostique en la vitesse et la pression, et on doit en général garder les termes d'ordre supérieur dans (21) et (22). Examinons alors l'équation (23) pour la vitesse verticale. Les différents termes sont d'ordre

$$\frac{W}{T}, \frac{WU}{L}, \frac{U^2}{a}, \frac{P}{H}, \frac{\rho g}{\rho_0}$$

En remplaçant W par au plus UH/L et P par UfL , on a

$$\leq \frac{UH}{LT}, \frac{U^2H}{L^2}, \frac{U^2}{a}, \frac{UfL}{H}, \frac{\rho g}{\rho_0}$$

ou, en divisant par UfL/H .

$$\leq \delta^2 R_o, < \delta^2 R_o, 1, \frac{\rho g H}{\rho_0 U f L}$$

Les deux premiers termes sont donc négligeables (2ème ordre au plus), et à l'ordre zéro on a l'équilibre hydrostatique :

$$\partial_z \pi + \frac{g\rho}{\rho_0} = 0 \quad (2.27)$$

Cette relation est presque toujours adoptée à priori pour les mouvements à grande échelle. En combinant (27) avec l'équilibre géostrophique (26), on trouve la "relation du vent thermique"

$$f \partial_z u = \frac{g}{\rho_0 a} \partial_\theta \rho \quad (2.28)$$

$$f \partial_z v = \frac{-g}{\rho_0 a \cos\theta} \partial_\gamma \rho$$

qui lie le cisaillement vertical du courant horizontal au gradient vertical de pression. La relation est utilisée dans la « méthode dynamique » pour estimer le courant à partir de mesures de densité. Notons que les termes uw/a , vw/a et $2w/a$ dans (21) – (24) sont négligeables. Le système d'équation se réduit donc aux « équations primitives »

$$\frac{du}{dt} - \left(f + \frac{u \tan\theta}{a}\right) v + \frac{1}{a \cos\theta} \partial_\gamma \pi = F_\lambda \quad (2.29)$$

$$\frac{dv}{dt} + \left(f + \frac{u \tan\theta}{a}\right) u + \frac{1}{a} \partial_\theta \pi = F_\theta \quad (2.30)$$

$$\partial_z \pi + \frac{\rho g}{\rho_0} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{a \cos\theta} (\partial_\lambda u + \partial_\theta (v \cos\theta)) + \partial_z w = 0 \quad (2.31)$$

avec

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{u}{a \cos\theta} \partial_\lambda + \frac{v}{a} \partial_\theta + w \partial_z \quad (2.32)$$

Ces équations sont utilisées dans les modèles de circulation océanique générale (GCM), avec l'équation d'état et une équation séparé pour T et S à la place de (7).

Cependant, pour les études analytiques et certaines études numériques, on utilise des systèmes d'équations plus simples, fonctions de l'échelle des mouvements que l'on veut représenter.

3. COUCHES LIMITES OCEANIQUES

La couche superficielle joue un rôle essentiel dans le maintien de la circulation océanique, puisque l'océan reçoit son énergie mécanique et thermique en surface, au contraire de l'atmosphère qui est largement chauffée par le bas.

L'énergie est transmise par la tension de vent et les échanges de chaleur. Le vent engendre une mer de vent et maintient le plus souvent une structure turbulente bien mélangée dans la couche superficielle. On s'intéresse, ici aux grandes échelles de temps et d'espace. Comme l'écoulement est turbulent dans la couche superficielle, on sépare les différents champs en une partie moyenne et une partie fluctuante : $u = \bar{u} + u'$, avec $\overline{u'} = 0$. Considérons la quantité de mouvement horizontale moyenne. On a :

$$(\partial_t + \bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}_1 + \overline{u' \cdot \nabla u'_1} - f \bar{u}_2 + \frac{1}{\rho_0} \partial_1 \bar{p} = \nu \nabla^2 \bar{u}_1 \quad (3.1)$$

$$(\partial_t + \bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}_2 + \overline{u' \cdot \nabla u'_2} + f \bar{u}_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_2 \bar{p} = \nu \nabla^2 \bar{u}_2$$

où $\overline{u' \cdot \nabla u'_\alpha}$ est la tension turbulente de Reynolds qui représente l'effet des fluctuations turbulentes, des ondes et des mouvements à petite échelle.

Comme la turbulence de la couche bien mélangée est forcée par le vent et les flux de chaleur, l'échelle de variation des propriétés statistiques des fluctuations est celle des variables atmosphériques, qui est maximum vers 4-5000 km dans les latitudes tempérées. Il y a peu d'énergie aux échelles inférieures à 100 km, et par conséquent le taux de variation horizontale des tensions de Reynolds est beaucoup plus petit que son taux de variation verticale (typiquement 50 m). Comme le flux vertical de quantité de mouvement est beaucoup plus grand que les tensions visqueuses, (3.1) se réduit à

$$(\partial_t + \bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}_1 - f \bar{u}_2 + \frac{1}{\rho_0} \partial_1 \bar{p} = -\partial_3 \overline{u'_3 u'_1} = \frac{1}{\rho_0} \partial_3 \tau_1^t \quad (3.2)$$

$$(\partial_t + \bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}_2 + f \bar{u}_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_2 \bar{p} = -\partial_3 \overline{u'_3 u'_2} = \frac{1}{\rho_0} \partial_3 \tau_2^t$$

où $\overline{u'_3 u'_\alpha} = -\frac{1}{\rho_0} \tau_\alpha^t$ est la tension turbulente par unité de masse et où on a utilisé la relation d'incompressibilité pour remplacer $\overline{u' \cdot \nabla u'_\alpha}$ par $\nabla \cdot (\overline{u' u'_\alpha})$. On introduit souvent une viscosité turbulente $\nu_3(x_3)$, par analogie avec l'équation de Naviers-Stokes, en définissant

$$\nu_3 \partial_3 \bar{u}_\alpha = -\overline{u'_3 u'_\alpha} \quad (3.3)$$

La condition aux limites de surface est que la tension soit continue, ce qui entraîne

$$\tau_{\alpha}^t = \tau_{\alpha} \quad \text{ou} \quad \rho_0 \partial_3 \overline{u_{\alpha}} = \tau_{\alpha} \quad \text{en } x_3 = 0 \quad (3.4)$$

où τ est la tension due au vent.

3.1 Couche d'Ekman de surface

Considérons tout d'abord comme Ekman (1905) le cas simple d'un milieu homogène forcé par un vent horizontalement uniforme. Les effets de l'advection sont négligeables et on a

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 - f u_2 &= \frac{1}{\rho_0} \partial_3 \tau_1^t \\ \partial_t u_2 + f u_1 &= \frac{1}{\rho_0} \partial_3 \tau_2^t \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec

$$\tau_{\alpha}^t = \tau_{\alpha} \quad \text{en } x_3 = 0 \quad (3.6)$$

où u_{α} représente désormais le courant à grande échelle

On suppose, en accord avec les observations, que les tensions turbulentes de cisaillement sont nulles en dessous d'une certaine profondeur d . On définit le transport d'Ekman

$$U_{\alpha} = \int_{-d}^0 u_{\alpha} \, dx_3 \quad (3.7)$$

En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t U_1 - f U_2 &= \tau_1 / \rho_0 \\ \partial_t U_2 + f U_1 &= \tau_2 / \rho_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ces équations montrent que le transport horizontal est indépendant de la répartition verticale des tensions turbulentes. Dans le cas stationnaire, le transport d'Ekman est à droite du vent (Hémisph. nord), et il est inversement proportionnel à f . Dans le cas variable, on a un courant d'Ekman et, en plus, des oscillations d'inertie. En effet, si on pose :

$$Z = U_1 + i U_2 \quad , \quad T = \frac{\tau_1 + i \tau_2}{\rho_0}$$

on obtient

$$\partial_t Z + i f Z = T$$

Si $Z = 0$ en $t = 0$, on a :

$$Z = \int_0^t T(\tau) e^{-if(t-\tau)} d\tau$$

Pour un vent constant selon x_1 ($\tau_2 = 0$), on trouve

$$Z = \frac{-i \tau_1}{\rho_0 f} (1 - e^{-ift}) \quad , \quad U_1 = \frac{\tau_1}{\rho_0 f} \sin ft \quad , \quad U_2 = \frac{-\tau_1}{\rho_0 f} (i - \cos ft) \quad (3.9)$$

En réalité, les tensions turbulentes ne sont pas nulles au fond de la couche de mélange et il y a une friction horizontale. Il en résulte un amortissement des ondes d'inertie. Si le vent reste constant, elles disparaissent après un certain temps et il ne reste que le transport d'Ekman :

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = \frac{-\tau_1}{\rho_0 f} \quad (3.10)$$

Spirale d'Ekman Pour avoir le profil des vitesses, il faut spécifier $v_3(x_3)$. Ekman a choisi le cas le plus simple, $v_3 = v \equiv$ constante. Le système d'équations se réduit à

$$\frac{1}{\rho_0} \partial_3 \tau_\alpha^i = v \partial_3^2 u_\alpha \quad (3.11)$$

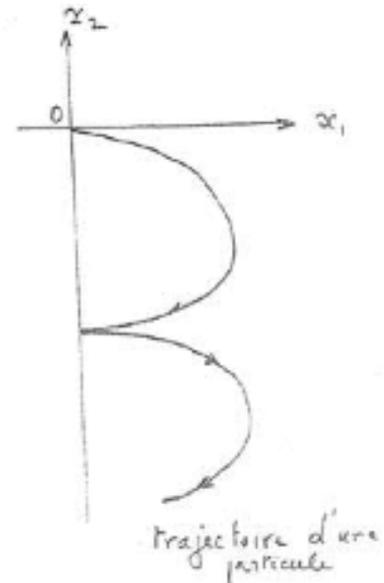
avec

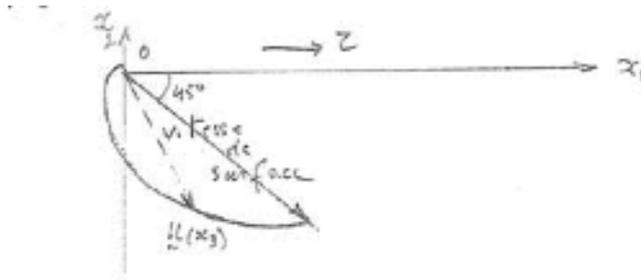
$$\rho_0 v \partial_3 u_\alpha = \tau_\alpha \quad \text{en} \quad x_3 = 0 \quad (3.12)$$

Dans le cas stationnaire, on trouve (solution bornée en $x_3 = -\infty$), si la tension de vent est orientée selon x_1 ($\tau_2 = 0$),

$$u_1 + i u_2 = \frac{\tau_1(1-i)}{\rho_0 \sqrt{2} v f} e^{(1+i)\frac{x_3}{h_e}} \quad (3.13)$$

où $h_e = \sqrt{\frac{2\nu}{f}}$ est la profondeur d'Ekman. Le courant décrit une spirale avec la profondeur.





Un profil différent peut être obtenu à partir d'un autre choix de (x_3) . Il est bon de noter que, si le profil d'Ekman n'a pas été vérifié précisément, le transport d'Ekman (70) est en parfait accord avec les observations (Fig. 3.3). La rotation observée du vecteur courant suggère une viscosité turbulente élevée près de la surface, où l'influence de la mer de vent se fait sentir. Cependant, elle ne peut être expliquée qu'en tenant compte de la stratification et des variations temporelles de la profondeur de la couche bien mélangée. On notera que la rotation du vecteur courant a été également observée sous la glace de mer, qui se déplace dans une direction légèrement à droite du vent dans l'hémisphère nord, en accord qualitatif avec la théorie d'Ekman.

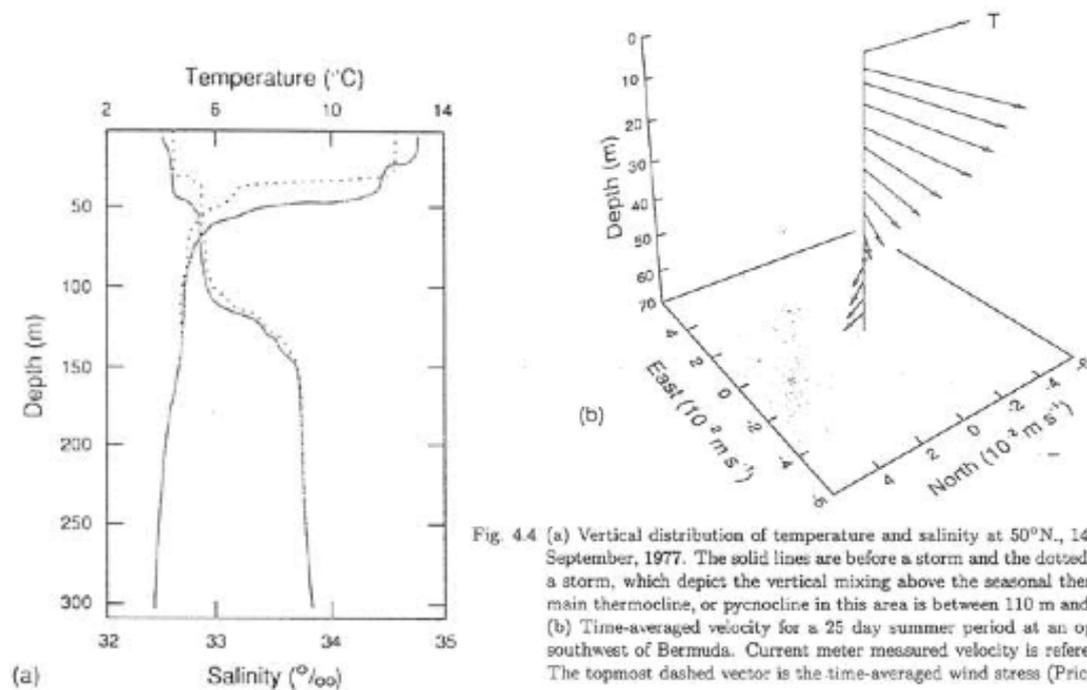


Fig. 4.4 (a) Vertical distribution of temperature and salinity at 50°N, 145°W, in early September, 1977. The solid lines are before a storm and the dotted lines are after a storm, which depicts the vertical mixing above the seasonal thermocline. The main thermocline, or pycnocline in this area is between 110 m and 160 m depth. (b) Time-averaged velocity for a 25 day summer period at an open ocean site southwest of Bermuda. Current meter measured velocity is referenced to 70 m. The topmost dashed vector is the time-averaged wind stress (Price et al., 1986).

3.2 Couche d'Ekman sur le fond

La couche d'Ekman sur le fond se traite de manière semblable, mais les conditions aux limites sont différentes : on impose que la vitesse \mathbf{u} est nulle sur le fond en $x_3 = 0$ et égale la vitesse géostrophique loin du fond, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g$ lorsque $x_3 \rightarrow \infty$. La friction turbulente introduit donc une composante agéostrophique de la vitesse d'autant plus importance qu'on se rapproche du fond. Considérons le cas simple d'un fluide de densité constante et supposons que la viscosité turbulente ν est constante. En conditions stationnaires, on a, loin du fond

$$f u_{g2} = \frac{1}{\rho_0} \partial_1 p$$

$$f u_{g1} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_2 p$$

Les équations

$$-f u_2 + \frac{1}{\rho_0} \partial_1 p = \nu \partial_3^2 u_1$$

$$f u_1 + \frac{1}{\rho_0} \partial_2 p = \nu \partial_3^2 u_2$$

peuvent alors s'écrire

$$-f (u_2 - u_{g2}) = \nu \partial_3^2 u_1$$

$$f (u_1 - u_{g1}) = \nu \partial_3^2 u_2$$

avec $\mathbf{u} = 0$ en $x_3 = 0$. Comme précédemment, on cherche la solution pour $u_1 + iu_2$, qui vaut

$$u_1 + iu_2 = (u_{g1} + iu_{g2})(1 - \exp(-\sqrt{\frac{if}{\nu}} x_3)) \quad (3.14)$$

et satisfait bien aux deux conditions aux limites (voir les figures de Pedloski 1987). Près du fond, la force de Coriolis équilibre la force de friction turbulente. Celle-ci diffuse donc la vorticité planétaire de l'écoulement.

La tension exercée par le fond s'obtient aisément car on a

$$\int_0^\infty \partial_3 (\tau_1' + i\tau_2') dx_3 = -(\tau_1'(0) + i\tau_2'(0)) = \nu \rho_0 \partial_3 (u_1 + iu_2)|_0 = -(1+i) \frac{\nu \rho_0}{h_e} (u_{g1} + iu_{g2}) \quad (3.15)$$

où $h_e = (2\nu/f)^{1/2}$ est la profondeur d'Ekman. On voit que la tension exercée par le fond est proportionnelle à \mathbf{u}_g mais qu'elle dépend de h_e et donc de ν . Au contraire de la couche de surface, la couche d'Ekman de fond dépend du détail des processus turbulents et sa paramétrisation dans les modèles dépend de ν qui est mal connu ; c'est donc un paramètre

relativement ajustable. La raison fondamentale de cette différence est que la tension turbulente est imposée par le vent en surface, tandis que près du fond c'est la vitesse géostrophique qui est prescrite et la tension de fond calculée à partir de celle-ci.

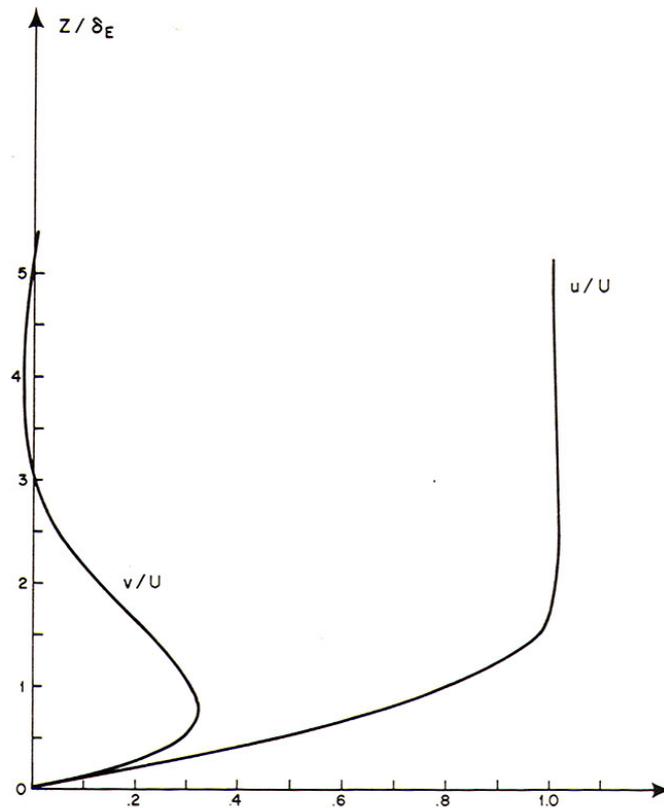


Figure 4.3.2 The profile of the velocity component u in the direction of the geostrophic velocity U , and of the velocity v at right angles to U . The vertical coordinate is the distance from the solid surface measured in units of the Ekman-layer thickness δ_E .

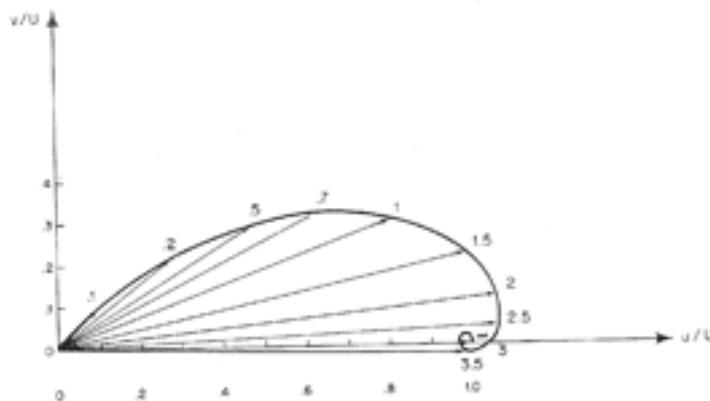


Figure 4.3.3 The velocity vector within the Ekman layer. The locus of the tip of the velocity vector traces the Ekman spiral. The value of z/δ_E corresponding to each vector is indicated on the spiral curve.

Lorsque la tension de vent ou la vitesse géostrophique près du fond n'est pas uniforme, la non-homogénéité du transport d'Ekman engendre une convergence ou une divergence des courants agéostrophiques et une vitesse verticale. Le cas de la couche de

surface sera traité dans le chapitre 4. Considérons la couche de fond. En intégrant l'équation de continuité $\partial_i u_i = 0$ du fond en $x_3 = 0$ au sommet de la couche d'Ekman, on obtient

$$\int_{Ek} \partial_\alpha (u_{e\alpha} + u_{g\alpha}) dx_3 = -u_{B3}$$

où u_{B3} est la vitesse verticale juste au-dessus de la couche d'Ekman (c'est donc une vitesse géostrophique). Si on néglige la petite divergence du transport géostrophique dans la couche d'Ekman (vu son épaisseur limitée), on obtient

$$u_{B3} = \rho_0^{-1} (\partial_1(\tau_2'(0)/f) - \partial_2(\tau_1'(0)/f)) \quad (3.16)$$

La friction du fond induit donc une vitesse verticale au bord de la couche d'Ekman égale au rotationnel de la tension de fond divisée par f . Comme la plupart des modèles océaniques n'ont pas une résolution verticale suffisante pour représenter explicitement la couche d'Ekman de fond, cette relation permet de représenter son effet. Si la viscosité turbulente est constante, on trouve en utilisant (15) pour f constant

$$u_{B3} = \frac{h_e}{2} \zeta_g \quad (3.17)$$

où ζ_g est la vorticité de l'écoulement géostrophique près du fond. La paramétrisation est simple, mais elle dépend de la profondeur d'Ekman et donc du détail (mal connu) des processus turbulents. Ces résultats peuvent se généraliser au cas stratifié non-homogène (Pedlosky 1987).