Compléments mathématiques et notations

1 Variations, dérivées et approximations

Valeurs approchées : notation
On utilise plusieurs notations pour exprimer que deux variables ou valeurs sont proches sans être exactement égales ; mais elles n'ont pas exactement le même sens.

- $\propto$ signifie *proportionnel à* : $a \propto b \Leftrightarrow a = b \cdot c$ où c est une constante.
- $\approx$ indique une *valeur approchée* : $a \approx b$ veut dire que les valeurs numériques de a et b sont proches, par exemple $\pi \approx 22/7$.
- $\sim$ Ce symbole peut avoir plusieurs significations. En physique, il indique une similarité. On utilisera $a \sim b$ pour dire que a et b sont du *même ordre de grandeur* (comme un $\approx$ moins précis) ou qu'ils varient de la même façon (un $\propto$ pas exact).
- $\simeq$ Ce symbole a ici le sens d'*équivalence*, ou *égalité asymptotique* indiqué aussi par $\sim$ en mathématiques : $a(x) \simeq b(x)$ veut dire que $a - b$ devient petit (devant a) quand x approche une limite $(0, \infty \cdots)$

1.1 Dérivée et dérivées partielles

Pour une fonction d'une seule variable $f(x)$, la dérivée – quand elle est existe – est la fonction définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La droite tangente à f en x_0 a alors pour équation :

$$y = f\left(x_0\right) + \left(x - x_0\right) f'\left(x_0\right)$$

Pour une fonction f de plusieurs variables, il existe une *dérivée partielle* pour chaque variable : il s'agit en chaque point de la dérivée à 1 dimension par rapport à cette variable, les autres variables étant maintenues constantes. On notera pour $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = \partial_x f\left(x_0, y_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$

et ainsi de suite.

1.2 Différentielle et notation «d»

1.2.1 Approche mathématique

1 dimension

À une dimension, la *différentielle* $\mathrm{d}f$ d'une fonction $f(x)$ est une fonction des 2 variables x et h :

$$\mathrm{d}f\,(x,h) = hf'\,(x)$$

Si f est dérivable, $\mathrm{d}f$ est bien définie pour toutes les valeurs de x et de h , y compris «grandes». C'est aussi pour h « petit » ($h \ll h^2$) la meilleure approximation à l'ordre 1 en h de $\big(f(x+h) - f(x)\big)$. On écrira de façon plus compacte :

$$\mathrm{d}f = f' \cdot \mathrm{d}x$$

où $\mathrm{d}x$ est la *fonction* telle que $\mathrm{d}x(x,h) = h$. On notera au passage que dérivée et différentielle n'ont pas la même unité (dans le cas de grandeurs physiques).

n dimensions

Si $f\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une fonction de n variables, sa différentielle $\mathrm{d}f$ est une fonction de $2n$ variables. De façon analogue à la dérivée qui est la pente de la tangente à f en 1 dimension, en chaque point $\mathrm{M}\,(x_1, x_2, \cdots x_n)$ la différentielle en M $\mathrm{d}f\,(\mathrm{M}, h_1, \cdots h_n)$ est l'*application linéaire tangente* à f. On peut montrer que ses coefficients sont les dérivées partielles par rapport aux x_i :

$$\mathrm{d}f\,(x_1, \cdots x_n, h_1, \cdots h_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_1, \cdots x_n) + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x_1, \cdots x_n)$$

On écrit donc

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

où $\mathrm{d}x_i$ est la fonction des $2n$ variables telle que $\mathrm{d}x_i\,(x_{1-n}, h_{1-n}) = h_i$.

1.2.2 Notation en physique : infiniments petits

Au lieu de la notation différentielle (où $\mathrm{d}x$ est une fonction), on utilise en physique la convention que $\mathrm{d}f, \mathrm{d}x$ sont des *variations infinitésimales* de f, x. C'est une façon de faire obsolète en mathématiques, mais qui est conservée en pratique car elle facilite les calculs et donne des résultats identiques à la notation différentielle pour les fonctions rencontrées couramment en physique.

La dérivée de f est alors notée comme le rapport $f'(x) = \mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x$, suivant sa définition originelle. De même, on note l'intégrale de la fonction f comme

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette notation rappelle la définition originale de l'intégrale comme une somme de rectangles de largeur infinitésimale $\mathrm{d}x$.

infinis d'ordre supérieur
La notation $\mathrm{d}x$ désigne normalement un *infiniment petit d'ordre 1*. On peut construire des infiniments petits d'ordre supérieur, par exemple en multipliant $\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}y$. On notera alors l'ordre par un exposant : $\mathrm{d}^2S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ etc. Cette notation est utile pour éviter les erreurs de calcul en vérifiant l'homogénéité : on ne doit avoir que des termes du même ordre dans une équation. Elle est cependant souvent omise quand il y a peu d'ambiguité.

1.3 Accroissements Δ, δ

1.3.1 Différence finie Δ

Le symbole Δ s'utilise pour une variation ou différence *finie* (i.e. pas infiniment petite) :

$$\Delta f = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})$$

En particulier, on ne peut pas en général approcher Δf avec sa dérivée ,mais il faut intégrer :

$$\Delta f = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \neq f'(x)\Delta x$$

1.3.2 Quantité élémentaire δ

Le symbole δ minuscule est utilisé dans 2 cas :

En mathématiques
on l'utilise pour une *forme différentielle* : une fonction de la forme $\delta f = f_1\left(x_1, x_2\right)\mathrm{d}x_1 + f_2\left(x_1, x_2\right)\mathrm{d}x_2$, avec $\left(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2\right)$ définies comme en (1.2.1). δf n'est pas dans le cas général la différentielle d'une fonction ; elle n'est donc pas notée avec un « d » droit.

En physique
on l'utilise pour désigner une quantité ou variation *élémentaire*, en général petite. Alors qu'on utilise « d » pour les variations infinitésimales d'une fonction bien définie – ou observable – comme température ou vitesse, on prendra « δ » dans les autres cas : par exemple la masse d'une parcelle d'air δm, ou une quantité de chaleur reçue δQ (il n'y a pas de fonction « chaleur »).

2 Analyse vectorielle

Les vecteurs peuvent être symbolisés soit par une flèche $\vec{v}$ – en écriture manuscrite notamment – ou par une police grasse [1] $\mathbf{v}$. Les vecteurs unitaires sont parfois notés avec un chapeau : $\hat{e}$. On utilisera les coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la suite, mais les résultats des différentes opérations vectorielles sont indépendantes de la base choisie.

Un certain nombre d'opérations sont possibles sur des vecteurs :

- Multiplication par un scalaire : $\phi\,\vec{v}$.
- Addition $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- *Produit scalaire* $\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right)$. Le résultat est un scalaire, qui mesure la projection d'un vecteur sur l'autre. En cartésien, $\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Du point de vue norme, $|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\| \cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$ et en particulier $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.
- *Produit vectoriel* $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ ou $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Le résultat est un *vecteur* $\vec{w}$ tel que
  1. $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (produit scalaire nul).
  2. $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\right)$ est orienté dans le sens direct.
  3. $\|\vec{w}\| = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\| \sin\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$.

  La dernière propriété implique que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul des composantes en coordonnées cartésiennes, qu'on peut retrouver en utilisant que si le repère $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ est direct, alors $\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath}$, et $\hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}$.

2.1 Opérateurs

Un *champ de vecteurs* est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace : $\vec{v}(x, y, z, t)$. On peut alors définir un certain nombre d'opérateurs provenant de la dérivation de champs scalaire ou vectoriel.

2.1.1 Gradient

Le *gradient* d'un champ scalaire ϕ est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, tel que pour un petit déplacement $\mathrm{d}\vec{l}$ autour d'un point M, on ait

$$\mathrm{d}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Le gradient indique à la fois le taux de variation de ϕ (par sa norme), et la direction de « plus grande pente ». Il est dirigé localement vers les valeurs élevées de ϕ, et orthogonal aux lignes $\phi = \mathrm{cste}$ (figure 1).

En coordonnées cartésiennes, les composantes du gradient sont :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}$$

1. Le style traditionnel est d'utiliser une lettre droite, la norme récente en italique.

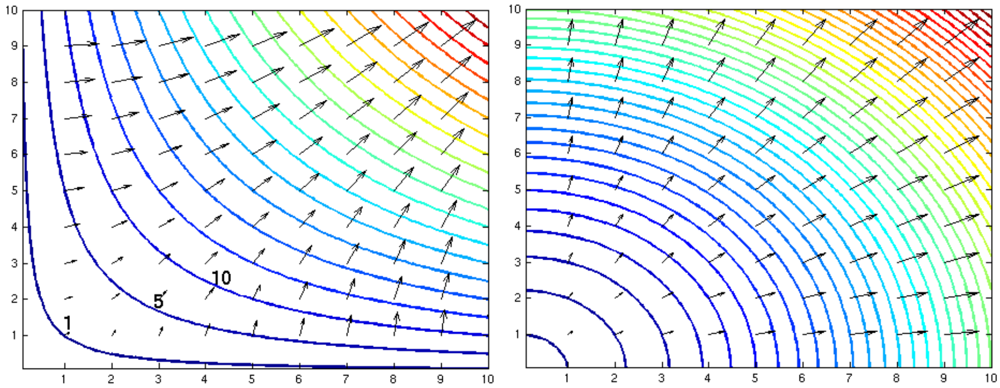

FIGURE 1 – Exemples de champs scalaires (couleur, valeurs élevées en rouge) et de leur gradient (flèches). À gauche : $f(x, y) = xy$, à droite $f(x, y) = x^2 + y^2$.

On peut également définir le gradient d'un champ de vecteurs, qui est un tenseur d'ordre 2 (analogue à une matrice) tel que

$$\mathrm{d}\,\vec{v} = \left[\mathrm{grad}\ \vec{v}\right] \mathrm{d}\,\vec{l}$$

2.1.2 Divergence

La *divergence* d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ est un scalaire, qui mesure en quelque sorte les « sources » ou «puits» implicites dans la structure du champ (figure 2c). En cartésiennes, elle s'écrit :

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Dans le cas où $\vec{v}$ est la vitesse d'un écoulement, sa divergence est égale au *taux de dilatation volumique* :

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}\delta V}{\mathrm{d}t}$$

où δV est un volume matériel élémentaire. Le divergence apparait enfin comme la *trace* (partie sphérique) du gradient de la vitesse $\left[\mathrm{grad}\ \vec{v}\right]$.

2.1.3 Rotationnel

Le *rotationnel* d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ est un autre champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v}$. Contrairement au gradient ou à la divergence, il est défini seulement en 3 dimensions. Le rotationnel mesure un *taux de rotation local* du champ de vecteur ; deux exemples sont

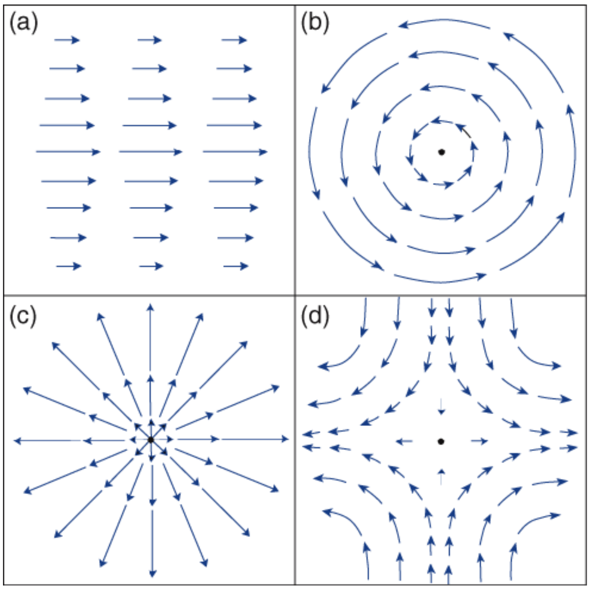

FIGURE 2 – Exemples de champs de vecteurs bidimensionnels : (a,b) champs rotationnels ; cisaillement pur (a) et rotation solide (b) (imaginer la rotation d'une petite roue à aubes insérée dans l'écoulement). (c) champ central divergent. (d) champ avec déformation, mais à divergence et rotationnel nuls (compression dans une direction, dilatation dans l'autre à surface constante).

illustrés sur la figure 2 a,b. Ses coordonnées en cartésien sont :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

Le rotationnel peut aussi être défini à partir de la partie antisymmétrique du tenseur $\left[\mathrm{grad}\ \vec{v}\right]$.

2.1.4 Laplacien

Le *laplacien*, noté Δ, est le plus courant des opérateurs faisant intervenir des dérivées d'ordre 2. Il est défini comme la divergence du gradient, et s'écrit donc en cartésien :

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \phi\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

et de même pour un vecteur (voir section 2.2.2).

Le laplacien apparait souvent comme la divergence d'un flux dans une équation de conservation, le flux étant lui-même proportionnel au gradient d'une variable. C'est le cas par exemple de l'équation de la chaleur $\partial_t T = \kappa \Delta T$. L'*équation de Laplace* $\Delta f = 0$ occupe également une place particulière ; ses solutions sont appelées *fonctions harmoniques.*

2.1.5 Notation nabla

Le symbole «nabla» ($\vec{\nabla}$ ou ∇) représente un opérateur ayant en coordonnées cartésiennes les «coordonnées» :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Il permet une notation compacte des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$, ce qui peut être très utile dans les longues formules. D'autre part, on peut retrouver ou anticiper les résultats d'un certain nombre de calculs en utilisant $\vec{\nabla}$ comme s'il s'agissait d'un vecteur normal. Par exemple, on pourra vérifier qu'en coordonnées cartésiennes on retrouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \vec{\nabla}\phi \qquad \text{div}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} \qquad \Delta\phi = \vec{\nabla}^2\phi$$

Par extension, on utilisera cette notation quelque soit le système de coordonnées (si utilisé).

notation $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)$
En utilisant la formulation en composantes de $\vec{\nabla}$, on trouve que

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

On utilise souvent cette notation pour exprimer

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi \quad \text{et} \quad \left[\text{grad}\,\vec{u}\right]\vec{v} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$$

Dans le deuxième cas, le résultat est un vecteur de composantes $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)u_i$ (en cartésien toujours).

Précautions !
Attention cependant : comme ce n'est pas un vrai vecteur, il y a des limites aux extrapolations possibles des calculs faits avec $\vec{\nabla}$. En particulier, sa dimension d'opérateur de dérivation le rend non commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ mais $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \neq \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$ par exemple.

D'autre part, il n'y a pas d'équivalent des «composantes» de $\vec{\nabla}$ dans les systèmes de coordonnées autres que cartésien.

2.2 Quelques relations importantes

2.2.1 Théorèmes intégraux

On considère un volume fini V délimité par une surface S de normale $\hat{n}$ (vecteur unitaire localement orthogonal à S dirigé vers l'extérieur de V). On a alors deux théorèmes :

Théorème flux-divergence ou *d'Ostogradsky* : le flux d'un vecteur à travers S est égal à l'intégrale sur V de sa divergence.

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}^2 S = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{v} \, \mathrm{d}^3 V$$

Ce théorème intervient souvent dans l'expression de lois de conservation. Il peut être utilisé comme définition de la divergence dans le cas où le volume devient petit.

Théorème du gradient : l'intégrale d'un scalaire sur $\vec{S}$ est égale à l'intégrale sur V de son gradient.

$$\oiint_S \phi \hat{n} \, \mathrm{d}^2 S = \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi \, \mathrm{d}^3 V$$

Ce théorème permet par exemple d'exprimer les forces de pression s'exerçant sur S (contrainte $-p\hat{n}$).

Ces deux relations sont facilement transposables à deux dimensions, avec une surface S délimitée par un contour fermé C. On a alors également l'identité suivante :

Théorème du rotationnel ou *formule de Stokes* : la circulation d'un vecteur le long de C est égale au flux de son rotationnel à travers S. En notant $\hat{t}$ le vecteur unitaire *tangent* à C , on a

$$\oint_C \vec{v} \cdot \hat{t} \, \mathrm{d}l = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}^2 S$$

Attention, l'orientation de $\hat{t}$ et $\hat{n}$ n'est pas indifférente, elle doit être dans le sens direct pour avoir le bon signe ($\hat{t}$ tourne autour de $\hat{n}$ dans le sens direct). Ce théorème fournit une définition du rotationnel quand le contour devient petit.

2.2.2 Identités vectorielles

Voici quelques identités vectorielles classiques...On voit que la notation $\vec{\nabla}$ permet d'en déduire un certain nombre parmi les plus simples, mais ne marche pas toujours.

produit mixte	$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
produit triple	$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$
	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$
divergence	$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{v}) = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi$
	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$
	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$
rotationnel	$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{u}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \phi \times \vec{u}$
	$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{u}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$
gradient	$\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$
laplacien	$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{div}}\left[\mathrm{grad}\ \vec{u}\right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$
Bernouilli	$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$