Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°5: Vorticité

I Calcul de vorticité

Calculer la vorticité des écoulements bi-dimensionnels simples suivants :

Cisaillement simple $\vec{v} = ay\hat{e}_x$

Déformation simple $v_x = ax, v_y = -ay$

Rotation solide à la vitesse angulaire Ω.

Vérifier que la divergence de l'écoulement est nulle dans tous ces cas.

II Vortex de Rankine

Le vortex de Rankine est un modèle de l'écoulement autour d'une dépression centrée en O. On décompose pour cela l'écoulement en 2 régions, proche du coeur (I) et plus éloignée (II). L'écoulement est à 2 dimensions, et on suppose une symétrie axiale par rapport à O.

Région distante

Loin du coeur, on modélise celui-ci par un *vortex ponctuel* : la circulation le long de n'importe quel contour entourant le point O a la même valeur Γ.

1. Montrer que la vorticité de l'écoulement loin du coeur doit être nulle
2. En utilisant la circulation le long d'un cercle de rayon r de centre O, calculer la valeur de la vitesse $v(r)$ tangente au cercle.
3. Vérifier à partir de $v(r)$ que la vorticité est nulle.
4. On a dans la direction radiale un équilibre entre forces de pression et accélération normale. En déduire la forme de la pression $p(r)$ (on supposera $p = 0$ à l'infini).

Coeur du vortex

Suffisamment près du point O, les forces de viscosité sont assez importantes pour éliminer toute déformation de l'écoulement. On a alors une rotation solide à la vitesse angulaire Ω. La transition entre les 2 régions se trouve à une distance r_0 de O.

1. Donnerla valeur de la vitesse $v(r)$ à l'intérieur du coeur.

2. En utilisant un calcul de la circulation le long d'un cercle de rayon r_0, trouver la relation entre Ω et Γ. Vérifier que la vitesse est continue en r_0.
3. Calculer la forme de la pression $p(r)$ à l'intérieur du vortex. On utilisera que la pression doit être continue en $r = r_0$.