Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°4 Bilans d'énergie

I Écoulements parallèles

On rappelle que pour un fluide visqueux incompressible, l'équation de l'énergie peut s'écrire pour un volume géométrique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho E_{\mathrm{tot}}\,\mathrm{d}^3V + \oiint_{\partial V} \rho E_{\mathrm{tot}}\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}^2S = \oiint_{\partial V}\left(-p\hat{n} + \vec{T}_{\mathrm{visq}}\right)\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}^2S - \iiint_V \eta\sum_{i,j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}^3V \qquad (1)$$

Dans écoulement de Couette plan entre 2 plaques infinies, on considère un volume fixe de fluide de longueur L suivant x et de longueur unité suivant z, allant d'une plaque à l'autre en hauteur.

1. Rappeler le profil de vitesse pour un écoulement stationnaire.
2. Quels sont les gains et pertes de quantité de mouvement pour ce volume ?
3. Interpréter les différents termes de l'équation (1).
4. Calculer ces termes sur les différentes faces du volume considéré (ou sur le volume lui-même)
5. Faire le bilan d'énergie. Comment est-il équilibré ?
6. Recommencer dans le cas de l'écoulement de Poiseuille cylindrique.

.

II Cas de l'eau peu profonde

Les équations d'un écoulement en eau peu profonde (densité constante, équilibre hydrostatique) en présence d'une rotation globale donnée par la fréquence f_0 sont :

– équation du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + f_0\hat{k}\times\vec{v} = -g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h \qquad (2)$$

– équation de continuité

$$\frac{\mathrm{d}(h+H)}{\mathrm{d}t} + (h+H)\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h+H)\,\vec{v} = 0 \qquad (3)$$

Avec $\vec{v}$ la vitesse horizontale, h la hauteur de la surface libre (par rapport à $z=0$) et $H(x,y)$ la profondeur moyenne en un point. On cherche à obtenir une équation d'évolution de l'énergie.

1. Exprimer les valeurs de E_c et E_p, les énergies cinétique et potentielle de la colonne de fluide (sans approximations).

2. Prendre le produit scalaire de l'équation (2) par $\vec{v}$.

3. Intégrer le résultat sur la verticale entre $z = -H$ et $z = h$.

4. En utilisant l'équation de continuité (3) et les identités vectorielles

$$\operatorname{div}(\phi \vec{v}) = \phi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$

manipuler cette équation pour arriver à un résultat de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_c + E_p) + \operatorname{div} \vec{F} = 0 \tag{4}$$

où $\vec{F}$ est un flux d'énergie intégré. Interpréter la forme de $\vec{F}$.