Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°3 Déformation, Viscosité

I Déformation dans un écoulement cisaillé

On s'intéresse à l'écoulement bi-dimensionel stationnaire donné par le champ de vitesse

$$\vec{v} = ay\hat{e}_x$$

où a est une constante (écoulement de cisaillement simple).

1. Représenter l'aspect du champ de vitesse. Quelles sont les trajectoires et lignes de courant ?
2. Calculer les composantes du gradient de la vitesse [G] (matrice 2x2) dans la base $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$.
3. Que vaut le tenseur taux de rotation $[\Omega]$ (partie antisymétrique de [G]) ? Montrer que pour un vecteur $\vec{u}$ quelconque, on a $[\Omega]\,\vec{u} = \Omega\hat{e}_z \times \vec{u}$. Quelle est la valeur de Ω ? (On pourra commencer par calculer $[\Omega]\,\hat{e}_x$ et $[\Omega]\,\hat{e}_y$).
4. Quelles sont les composantes du tenseur taux de déformation $[\epsilon]$ (partie symétrique de [G]) ? Que vaut sa trace ?
5. Calculer les vecteurs propres de $[\epsilon]$ et les valeurs propres associées. On rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur propre avec une valeur propre λ, alors $[\epsilon]\,\vec{u} = \lambda\vec{u}$.
6. Comment évolue (se déforme) un volume matériel initialement rectangulaire (côtés parallèles à (Ox) et (Oy)) ? Montrer (qualitativement) qu'on peut décomposer cette évolution en une élongation dans les directions des vecteurs propres (directions principales) et une rotation.
7. Le tenseur des contraintes visqueuses vaut $[\sigma'] = 2\eta\,[\epsilon]$. Que vaut la contrainte sur une surface de normale $\hat{e}_y$, $\hat{e}_x$?
8. Calculer la valeur de la contrainte sur des surfaces de normales $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, les vecteurs propres de $[\epsilon]$.
9. Que vaut la résultante des forces de viscosité (par unité de volume) $\eta\Delta\vec{v}$?

Répéter ensuite ces questions pour le champ de vitesse

$$v_x = ax, \quad , \quad v_y = -ay$$

II Analyse dimensionelle

On rappelle l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \vec{g} + \nu\Delta\vec{v} \tag{1}$$

On cherche à exprimer cette équation en utilisant des variables sans dimensions. On définit les nouvelles variables

- coordonnées espace : $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{y} = y/L$ etc.
- coordonnée temps : $\tilde{t} = t/T$.
- anomalie de pression normalisée : $\phi = \frac{\delta P}{\rho}/\Phi$.
- vitesse : $\tilde{\vec{v}} = \vec{v}/U$.

où T, L, Φ, U sont des constantes dimensionnelles donnant les échelles (ordre de grandeur des variations) caractéristiques de l'écoulement. Les variables avec tildes sont donc sans dimension, et d'ordre de grandeur 1 si les constantes sont bien choisies.

1. Exprimer les variables dimensionnelles en fonction des variables sans dimensions, puis remplacer dans l'équation (1).
2. Normaliser pour avoir un terme d'accélération (membre de gauche) d'ordre 1. Quels sont les ordres de grandeur des termes du membre de droite ?