Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°2: Écoulements parallèles

Ce TD s'intéresse à des écoulements de fluides incompressibles visqueux, où la vitesse est dans une seule direction (lignes de courant parallèles). On considèrera uniquement les forces de pression et de viscosité, et on ne s'occupera pas de la gravité.

I Écoulement de Couette plan

On considère la situation suivante : un écoulement entre 2 plaques parallèles infinies situées à $y = 0$ et $y = H$. La plaque supérieure a une vitesse V dans la direction (Ox), la plaque inférieure est immobile. L'écoulement est stationnaire.

Conditions aux limites Pour un écoulement visqueux, la vitesse du fluide doit être égale à celle des plaques à leur contact. En déduire les conditions aux limites pour la vitesse (3D) en $y = 0$ et $y = H$.

Continuité Le fluide étant incompressible, sa divergence est nulle. En utilisant les symétries du problème, montrer que seule la vitesse suivant x est non nulle, et qu'elle ne dépend que de y.

Bilan des forces On s'intéresse à un petit volume de dimensions $(\delta x, \delta y, \delta z)$ situé au milieu de l'écoulement. Faire un bilan des forces s'exerçant sur toutes les faces dans la direction (Ox). Montrer que la résultante vaut (par unité de volume $\delta x \delta y \delta z$) :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Profil de vitesse En déduire le profil de vitesse $v_x(y)$ de l'écoulement.

Frottements Calculer les forces (par unité de surface) exercées par le fluide sur chacune des 2 plaques. Quel est la résultante ?

II Écoulement de Poiseuille cylindrique

On s'intéresse maintenant à un écoulement dans un cylindre de rayon R, de longueur infinie, d'axe parallèle à la direction (Ox). Un gradient de pression constant

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$$

est appliqué.

On note r la distance à l'axe du cylindre, v_r la composante radiale de la vitesse et v_θ la vitesse autour de l'axe (coordonnées cylindriques)

Continuité la divergence de la vitesse s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

En utilisant les symétries du problème et les conditions aux limites, montrer que v_r et v_θ sont nulles en tout point.

Bilan des forces On considère un volume cylindrique d'axe $r = 0$, de dimensions $(\delta x, r)$. Faire un bilan des forces s'exerçant sur toutes les faces dans la direction (Ox). La force visqueuse exercée dans la direction x par unité de surface s'écrit simplement

$$F_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial r}$$

Profil de vitesse Écrire l'équation du mouvement dans la direction (Ox), puis l'intégrer pour trouver le profil de vitesse $v_x(r)$.

Frottements Calculer la force totale exercée par le cylindre sur le fluide contenu dans une portion de longueur L. Comparer à la résultante des forces de pression sur la même portion de fluide.

Débit En intégrant, calculer le débit volumique du fluide à travers une section du cylindre.

Poiseuille Plan On peut refaire la même chose cette fois pour un écoulement compris entre 2 plaques parallèles (comme Couette) immobiles, avec un gradient de pression constant.