Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°1

I Advection de la température par un écoullement cisaillé

On rappelle l'expression de la dérivée Lagrangienne (en suivant une parcelle) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}$$

On considère le champ de température donné à l'instant initial par

$$T(x, y, t = 0) = T_0(1 + \alpha x) \tag{1}$$

La température d'une parcelle est conservée au cours du temps :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

et le champ de vitesse stationnaire dans la direction (Ox) est donné par

$$v_x = \frac{v_0}{L} y \tag{3}$$

v_0, L, T_0 et α sont des constantes. On cherche à connaitre l'évolution au cours du temps du champ de température.

Point de vue Lagrangien

1. Donner l'allure du champ de température à $t = 0$ (tracer quelques isothermes, et indiquer les zones chaudes et froides).
2. Une parcelle occupe la position (x_0, y_0) au temps $t = 0$. En intégrant l'équation (3), déterminer sa position $(x(t), y(t))$ à l'instant t.
3. En déduire l'équation $y(x)$ de la courbe occupée à t par l'ensemble des parcelles initialement à l'abscisse x_0. Tracer la nouvelle forme du champ de température.

Point de vue Eulérien

1. En utilisant les équations (2) et (3), calculer l'évolution locale de la température $\frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t)$.
2. En intégrant cette relation, calculer la valeur de $T(x, y, t)$ (on pourra utiliser que si $\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial T}{\partial x}$ alors $T = F(x + at)$).

3. Vérifier qu'on retrouve la même équation d'une courbe isotherme $T = \text{cste}$ à t.

II Déformation simple

On considère l'écoulement stationnaire à 2 dimensions suivant :

$$v_x = ax \qquad ; \qquad v_y = -ay \tag{4}$$

où a est une constante.

1. Une parcelle se trouve en (x_0, y_0) à $t = 0$. Intégrer l'équation (4) pour trouver sa trajectoire $x(t), y(t)$.
2. De quel type de courbe s'agit-il ? (indication : montrer que $xy = \text{cste}$). Tracer une de ces trajectoires (avec $(x_0, y_0) > 0$).
3. Retrouver ce résultat en calculant l'équation des lignes de courant à partir de (4). On rappelle l'équation des lignes de courant
$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y}$$
4. Calculer la divergence du champ de vitesse (4).
5. On considère le rectangle dont les sommets à l'instant $t = 0$ occupent les points $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Comment évolue ce rectangle au cours du temps ? Montrer que sa surface est constante.