Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

Devoir N°3: vorticité

I Brise de mer

On considère la situation suivante : deux points A et B sont séparés de 50 km ; A étant au dessus de l'océan et B du continent. Pendant la journée, la température de l'air T_B au dessus de B vaut 5 °C de plus que celle au dessus de A T_A (au même niveau de pression).

On cherche à calculer l'évolution de la circulation le long d'un contour fermé donné par :

– La verticale de A et B entre 1000 et 850 hPa

– Sur l'horizontale, les lignes (AB) à 1000 et 850 hPa

1. Écrire le théorème de Kelvin donnant l'évolution de la circulation Γ le long de ce contour (on négligera la friction).
2. En utilisant la loi des gaz parfaits, exprimer le terme barocline avec la température T au lieu de la masse volumique ρ.
3. En intégrant, donner la valeur de $\mathrm{d}\Gamma/\,\mathrm{d}t$.
4. Calculer la valeur de Γ au bout de 3 heures.
5. En supposant la vitesse constante le long du contour, donner la valeur de la vitesse du vent près du sol.
6. Retrouver ces résultats en utilisant le flux du vecteur barocline à travers le contour (on exprimera le vecteur barocline en fonction des gradients de T et p).

II Équation de la vorticité linéarisée

On considère un écoulement en eau peu profonde. On rappelle les équations du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + f\widehat{k} \times \vec{v} = -g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\,(H\vec{v}) = 0 \tag{2}$$

On se place dans le cas d'un fond plat, en plan f (f constant).

1. Écrire la forme linéarisée de ces équations, pour de faibles vitesses et déplacements de la surface h.

2. Déduire de l'équation du mouvement (1) une équation d'évolution de la vorticité $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$. On prendra pour cela la dérivée des deux équations pour les composantes u et v de la vitesse suivant x et y.
3. En utilisant l'équation de continuité (2), montrer qu'on arrive à l'équation de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta}{f} - \frac{h}{H}\right) = 0 \qquad (3)$$

III Ajustement géostrophique

On considère maintenant l'état initial suivant, toujours en eau peu profonde : la hauteur de la surface libre vaut $h = h_0$ pour $x > 0$, et $h = -h_0$ pour $x < 0$ (marche d'escalier en $x = 0$). La vitesse initiale et nulle, et il n'y a pas de dépendance de l'écoulement en y.

On cherche maintenant à connaitre l'état final, qui doit être stationnaire et toujours indépendant de y.

1. Montrer qu'on doit avoir $u = 0$.
2. Montrer que le courant v est en équilibre géostrophique, et écrire cette relation entre v et h.
3. Écrire que les valeurs initiale et finale de l'équation de conservation (3) sont égales.
4. En utilisant les 2 dernières relations entre v et h, trouver une équation différentielle satisfaite par h.
5. Résoudre cette équation en donnant la forme finale de h. Quelle longueur caractéristique apparait ?
6. Calculer la différence d'énergie potentielle entre l'état initial et final, intégrée sur $x > 0$.
7. Même question pour l'énergie cinétique.
8. Que se passerait-il dans un cas sans rotation ($f = 0$) ?