Année 2014-2015

Dynamique des fluides géophysiques

Devoir°2 Écoulement en eau peu profonde (suite)

Les équations d'un écoulement en eau peu profonde (densité constante, équilibre hydrostatique) en présence d'une rotation globale donnée par la fréquence f_0 sont :

– équation du mouvement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + f_0\hat{k} \times \vec{v} = -g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h \tag{1}$$

– équation de continuité

$$\frac{\mathrm{d}(h+H)}{\mathrm{d}t} + (h+H)\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h+H)\,\vec{v} = 0 \tag{2}$$

Avec $\vec{v}$ la vitesse horizontale, h la hauteur de la surface libre (par rapport à $z = 0$) et $H(x,y)$ la profondeur moyenne en un point.

I Analyse en ordre de grandeur

On cherche à obtenir une version de l'équation du mouvement (1) avec des variables sans dimensions, notées par des tildes. On définit par exemple $\tilde{x} = x/L$.

1. Donner la liste des différentes échelles du mouvement, et des variables sans dimensions associées (on prendra une hauteur typique h_0 au lieu de H pour les variations de h)
2. Écrire l'équation du mouvement en remplaçant par les variables sans dimensions. Normaliser pour avoir un terme d'accélération $\mathrm{d}\tilde{\vec{v}}/\,\mathrm{d}\tilde{t}$ d'ordre 1. Quels nombres caractéristiques apparaissent ?
3. On suppose le nombre de Rossby $Ro = f_0L/U$ grand. Quel est l'ordre de grandeur de h_0/H ?
4. On considère maintenant Ro petit. Quel est l'ordre de grandeur de h_0/H ? Montrer qu'on peut l'écrire comme
$$\frac{h_0}{H} = Ro\frac{L^2}{L_d^2}$$
où L_d est homogène à une longueur, appelée *rayon de déformation*.
5. Est-ce que l'ordre de grandeur de h_0/H obtenu, qui peut être petit, est compatible avec l'équation de continuité ?

II Ondes de Kelvin côtières

On utilise le modèle d'océan en eau peu profonde en rotation décrit par (1,2). La région $y < 0$ est occupée par un continent, et le fond est plat (H constant).

1. Rappeler les équations du mouvement *linéarisées* pour ce modèle.
2. La géométrie imposant $v = 0$ en $y = 0$, on cherche des solutions où $v = 0$ partout. Donner le système d'équations simplifié.
3. Montrer qu'à partir des équations de continuité et du mouvement zonal on arrive à une équation d'ondes. Que vaut la vitesse de phase c ?
4. Les solutions pour la hauteur de la surface peuvent s'écrire comme $h = h(y)F(x \pm ct)$. Calculer la valeur de u.
5. Écrire que u et h sont en équilibre géostrophique (équation du mouvement méridien). En déduire une équation pour $h(y)$.
6. Quelle est la forme de $h(y)$? Montrer que si h doit tendre vers 0 à l'infini, une seule direction de propagation est possible.

III Cas 2 couches, gravité réduite

On considère ici 2 couches de fluides superposées, de densités homogènes ρ_1 et ρ_2 proches, avec $\rho_2 > \rho_1$. La couche de surface est caractérisée par une surface libre de hauteur h, et une profondeur moyenne H_1 constante. La couche profonde a une profondeur moyenne $H_2(x, y)$, la profondeur totale est donc $H = H_1 + H_2$. Comme la surface libre, la profondeur de l'interface entre les deux fluides peut varier d'une hauteur $\eta(x, y, t)$ autour de $z = -H_1$ (couche 1 moins profonde si $\eta > 0$).

1. En utilisant l'équilibre hydrostatique, écrire la valeur de la pression à une profondeur z située dans la couche 1, puis dans la couche 2.
2. En déduire la valeur du gradient de pression dans les 2 couches, puis écrire l'équation du mouvement dans chaque couche (vitesses $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$).
3. Écrire l'équation de continuité dans chaque couche, intégrée sur l'épaisseur totale de la couche.
4. On suppose (cas barotrope) que $\vec{v}_1 \approx \vec{v}_2 \approx \vec{v}$. Montrer que les variations de h et η sont du même ordre de grandeur.
5. Montrer qu'on peut se ramener à un système d'équation pour $\vec{v}$ semblable à (1,2) dans lequel η a disparu. Quelle sera la vitesse de phase des ondes de gravité ?
6. On suppose maintenant que la couche profonde est inerte ($\vec{v_2} \approx 0$). Montrer qu'on peut exprimer la pente de la surface libre en fonction de celle de l'interface η.
7. On fait l'approximation de Boussinesq : $\rho_2 - \rho_1 \ll \rho_{1,2}$ (faible écart de densité). Montrer qu'on a alors $h \ll \eta$.
8. Montrer qu'on peut arriver à un système d'équations proche de (1,2) où $-\eta$ joue le rôle de h et g est remplacé par une *gravité réduite* g'. Quelle est la vitesse des ondes de gravité ?