Dynamique des fluides géophysiques

Devoir N°1 Ondes en eau peu profonde

I Modèle de l'eau peu profonde

Le modèle en eau peu profonde (shallow water) est très utilisé -- avec quelques variantes -- pour étudier les écoulements océaniques mais aussi atmosphériques. La géométrie est représentée sur la figure 1 : un fluide de densité ρ, limité au fond par une surface solide à la profondeur $H(x, y)$, et par une surface libre en $z = h(x, y, t)$. La verticale (direction z) suit le champ de pesanteur $\vec{g}$.

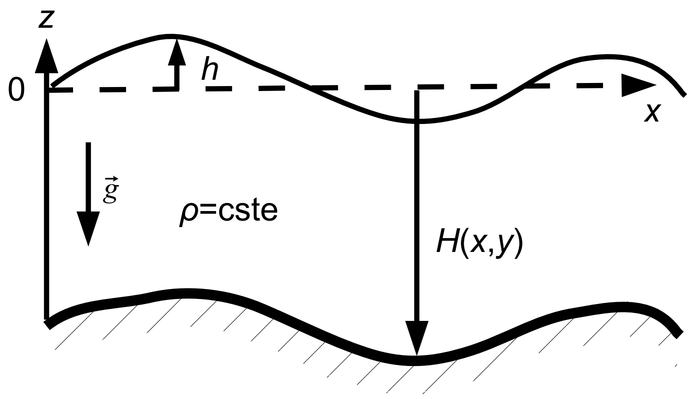

FIGURE 1: Modèle en eau peu profonde : fluide de profondeur $H(x, y)$, de densité constante ρ. La surface libre varie d'une hauteur $h(x, y, t)$ par rapport à $z = 0$.

Les autres approximations sont que le fluide est incompressible ($\rho = $ cste) et non visqueux. L'équation du mouvement sur la verticale se réduit à l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \vec{g} \tag{1}$$

C'est en fait une conséquence de l'aspect « peu profond » du fluide : $H \ll L$ où L est l'échelle horizontale du mouvement. Dans la suite, on notera donc $\vec{v}$ la vitesse *horizontale* dans l'écoulement, et $w = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ la vitesse verticale.

Équation du mouvement

1. En intégrant l'équilibre hydrostatique (1) à partir de $z = h$ où $p = p_0 = $ cste, calculer la pression $p(z)$.
2. Exprimer le gradient horizontal de pression en fonction du gradient de h.

3. Montrer que l'équation du mouvement sur l'horizontale s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h \tag{2}$$

4. En déduire que si $\vec{v}$ est indépendante de z à un instant initial, elle le reste ensuite.

Équation de continuité

1. Par continuité, une parcelle en surface ($z = h$) doit y rester et donc suivre ses déplacements ; de même une parcelle au fond va suivre la topographie au cours de ses déplacements horizontaux. En déduire les expressions de $w(z = h)$ et $w(z = -H)$.
2. Intégrer l'équation de continuité sur la verticale entre la surface et le fond.
3. En utilisant les résultats précédents, montrer que l'équation de continuité intégrée peut s'exprimer sous les formes (équivalentes) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h+H) + (h+H)\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}\big[(h+H)\,\vec{v}\big] = 0 \tag{4}$$

II Ondes de gravité

On considère maintenant le cas d'un écoulement indépendant de y, ayant donc uniquement une vitesse horizontale u suivant (Ox). D'autre part, on s'intéresse à des *petits déplacements*, donc $h \ll H$ et on négligera les termes non-linéaires (produits entre termes en h ou en u).

Structure et propagation

1. En utilisant ces approximations, écrire l'équation du mouvement (2) dans la direction (Ox) ainsi que l'équation de continuité (4).
2. Intégrer l'équation du mouvement sur la verticale (sans les termes non-linéaires).
3. Éliminer le débit (Hu) entre ces 2 équations, pour arriver à une équation pour h.
4. On suppose que la profondeur H varie lentement par rapport à h. Montrer que h suit alors une équation de type *équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{5}$$

5. Que vaut la vitesse de propagation c ? Calculer sa valeur dans le cas océanique pour une profondeur $H = 4000\,\mathrm{m}$.

6. Une solution de (5) est l'onde progressive harmonique

$$h = h_0 \cos k\,(x - ct) \tag{6}$$

Quelle est la direction de propagation ?

7. Calculer la vitesse u associée à cette onde.

8. Représenter l'onde sur un schéma, en faisant apparaitre les anomalies de h et u. Montrer qu'on peut retrouver qualitativement la direction de propagation des anomalies de h et u (regarder le signe des termes des équations de continuité et du mouvement).

Énergétique

On considère toujours l'onde harmonique (6). On s'intéresse ici à la densité d'énergie E associée à l'onde : énergie intégrée sur la colonne, par unité de surface horizontale.

1. L'énergie potentielle gravitationelle d'une parcelle vaut (par unité de volume) $\rho g z$. Calculer l'anomalie de densité d'énergie potentielle liée à un déplacement h de la surface libre.

2. Calculer la densité d'énergie cinétique pour une vitesse horizontale u.

3. Pour h de la forme (6), la valeur moyenne de h^2 est $\overline{h^2} = \frac{1}{2}h_0^2$. En déduire la densité d'énergie moyenne liée à l'onde. Montrer que les contributions de l'énergie potentielle et cinétique sont égales (équipartition de l'énergie).

4. Le *flux d'énergie* vaut $c_g E$, où c_g est la vitesse de groupe de l'onde. Ce flux d'énergie étant conservé, montrer que l'amplitude de l'onde augmente quand la profondeur H diminue.

5. Application : un tsunami a une amplitude initiale de 1 m à une profondeur de 4000 m. Quelle est l'amplitude de h à une profondeur de 10 m ? Celle de la vitesse u ? Sa vitesse de propagation ?