Dynamique de l'atmosphère et l'océan
Approximations classiques

Ce chapitre présente un certain nombre d'approximations et de versions simplifiées des équations de base utilisées pour l'étude de la circulation océanique et atmosphérique ; où le système *quasi-géostrophique* occupe une place particulière par son usage pour la dynamique tourbillonaire aux moyennes latitudes.

On peut résumer les approximations classiques par la formule que l'océan et l'atmosphère sont des fluides *minces* (profondeur faible), *stratifiés* (densité diminuant sur la verticale), et *tournants* (influence de la rotation terrestre).

Les repères et notations sont les mêmes que dans la première partie (dynamique à l'équilibre) et ne sont pas repris ici.

1 Équations de base

On rappelle ici la liste des équations de base issues des grandes lois de conservation.

1.1 Équation d'état

L'équation d'état donne la densité du milieu en fonction de sa température, pression, et éventuellement d'autres paramètres.

Atmosphère
Pour l'atmosphère, il s'agit de l'équation des gaz parfaits sous forme massique :

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{1}$$

Avec $R = 287\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$ la constante de l'air sec.

Océan
Dans l'océan, la densité ρ est une fonction non-linéaire de T, la salinité S et dans une moindre mesure de la pression p. Les variations relatives de ρ sont cependant plus faibles que dans l'atmosphère. On pourra donc utiliser une forme linéarisée :

$$\rho \approx \rho_0 \left[1 - \beta_T \left(T - T_0\right) + \beta_S \left(S - S_0\right) + \beta_p \left(p - p_0\right)\right] \tag{2}$$

Les paramètres β sont des coefficients de compressibilité, eux-mêmes dépendants de T, S, et p. Pour certaines applications où une grande précision est indispensable, comme pour la formation d'eau profonde, on utilisera une forme non-linéaire plus précise. Dans le cas de mouvements sur des profondeurs pas trop importantes (plus petites que quelques 1000 m), on pourra négliger l'effet des variations de pression.

1.2 Équation de continuité

L'équation de continuité décrit la conservation de la masse d'une quantité d'air. En considérant la masse d'une parcelle $\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$, on écrit que

$$\frac{1}{\delta m} \frac{\mathrm{d}\delta m}{\mathrm{d}t} = 0$$

En utilisant par exemple que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3}$$

1.3 Équation thermodynamique

L'équation thermodynamique s'obtient à partir du premier principe de la thermodynamique $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.

Atmosphère
En utilisant que l'atmosphère est un un gaz parfait, on arrive à :

$$C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dot{q} \tag{4}$$

avec $\dot{q}$ le taux de chauffage diabatique massique (en W·kg^{-1}). On peut également utiliser une forme en conservation de la température potentielle $\theta = T\left(p/p_0\right)^{-R/C_p}$:

$$C_p \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\theta}{T} \dot{q} \tag{5}$$

Océan
Dans l'océan, on doit utiliser des formes approchées à cause de l'équation d'état compliquée, notamment pour la compressibilité. Pour des mouvements peu profonds, les formes les plus simples sont :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = Q\left[T\right]$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = Q\left[\rho\right]$$

où les termes « diabatiques » au second membre représentent les effets des sources et puits de chaleur et de salinité. Pour des mouvements verticaux importants, on ne peut plus négliger l'effet des variations de pression. On remplace alors T et ρ par la température ou densité potentielle :

$$\begin{aligned} \theta &\approx T + \beta_T g z / C_p \\ \rho_{\text{pot}} &\approx \rho + \rho_0 g z / c_s^2 \end{aligned} \tag{6}$$

où c_s est la vitesse du son. On a utilisé l'équilibre hydrostatique pour remplacer p par $\rho_0 g z$.

1.4 Équation du mouvement

Dans le référentiel tournant (mouvement par rapport à la surface de la Terre), l'équation du mouvement en 3 dimensions s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{7}$$

On a négligé la viscosité, et posé $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{G} - \Omega^2 \mathbf{HM}$.

2 Géométrie : fluide sphérique mince

Une première série d'approximations classiques utilise le fait que les mouvements dans l'atmosphère et l'océan ont lieu dans une couche de fluide mince (par rapport au rayon de la Terre) à la surface d'une (quasi-)sphère.

L'équation du mouvement peut se projeter dans un système de coordonnées sphériques (r, φ, λ), dans lequel les composantes de la vitesse sont

$$u = r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \qquad v = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad w = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2\Omega v\sin\varphi + 2\Omega w\cos\varphi + \dfrac{uw}{r} - \dfrac{uv\tan\varphi}{r} = -\dfrac{1}{\rho r\cos\varphi}\dfrac{\partial p}{\partial\lambda} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\Omega u\sin\varphi + \dfrac{vw}{r} + \dfrac{u^2\tan\varphi}{r} = -\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\Omega u\cos\varphi - \dfrac{u^2+v^2}{r} = -\rho^{-1}\dfrac{\partial p}{\partial r} - g \end{cases} \tag{9}$$

Les équations de continuité et thermodynamique peuvent être développées de façon similaire.

2.1 Fluide mince, équations primitives

L'échelle verticale H des mouvements dans l'atmosphère ou l'océan est toujours petite par rapport à la distance au centre de la Terre. D'autre part, pour des mouvements à grande échelle le *rapport d'aspect* du mouvement $H/L \ll 1$, et par continuité on a aussi $W/U \ll 1$.

On applique alors au système complet (9) les approximations suivantes :

1. On néglige l'altitude par rapport au rayon de la Terre a. La distance r au centre de la Terre est alors remplacée par la valeur constante a, et les dérivées $\partial/\partial r$ deviennent $\partial/\partial z$ où z est l'altitude.
2. *Approximation traditionnelle* : On néglige les termes de Coriolis en w. On néglige également les termes de sphéricité de la forme uw/a par rapport à u^2/a dans l'équation du mouvement, et tous les termes sphériques et de Coriolis dans l'équation verticale. L'accélération de Coriolis se réduit alors à $f\widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}$ avec $f = 2\Omega\sin\varphi$.

Les différents points de l'approximation traditionnelle ne peuvent pas être pris séparément, sinon le système ne conserve plus correctement l'énergie.

Ces approximations sont valables à la fois pour les mouvements à grande échelle où $W \ll U$, mais aussi à petite échelle où $W \sim U$. Dans ce dernier cas, les termes sphériques et de Coriolis sont en effet toujours négligeables ($L \ll a$ et $Ro \gg 1$).

Dans le cas de mouvements à grande échelle, on ajoute souvent l'équilibre hydrostatique sur la verticale, qui est lui aussi une conséquence du faible rapport d'aspect du mouvement (voir section 3.3). On obtient alors les *équations primitives* :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv - \dfrac{uv\tan\varphi}{a} = -\dfrac{1}{\rho a\cos\varphi}\dfrac{\partial p}{\partial\lambda} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu + \dfrac{u^2\tan\varphi}{a} = -\dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\partial p}{\partial\varphi} \\ 0 = \dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho g \end{cases} \tag{10}$$

Ce système des équations primitives (qui comporte également des versions des équations de continuité, d'état et thermodynamique après les mêmes approximations) est en pratique le plus « complet » utilisé pour l'étude de la circulation générale (à grande échelle) de l'atmosphère et l'océan (en ajoutant Boussinesq). C'est en particulier celui utilisé par les modèles de prévision météorologique ou de simulation détaillée du climat.

2.2 Plans f et β

L'équation du mouvement (7) fait apparaitre des termes liés à la sphéricité de la Terre quand elle est projetée sur les différentes directions du repère local (9). Pour simplifier, on peut la projeter à la place sur le plan tangent à la surface $\left(\mathrm{M}, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$. Tous les termes sphériques de la forme $(uv\tan\varphi/a)$ disparaissent alors, mais le terme de Coriolis demeure. D'autre part, les différents gradients (pression, vitesse) s'expriment en coordonnées cartésiennes (x, y) au lieu de (λ, φ).

Plan f
Dans l'approximation dite « plan f », on considère que $f = \text{cste} = f_0$. Elle permet de conserver l'effet dynamique de la rotation de la Terre (force de Coriolis), sans les effets géométriques.

Plan β
On note β la dérivée méridienne de f :

$$\beta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \frac{2\Omega\cos\varphi}{a} \tag{11}$$

Aux moyennes latitudes, $\beta \sim 10^{-11}\ \mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. L'approximation du « plan β » utilise $\beta = \text{cste}$, on a alors $f = f_0 + \beta y$. Par rapport au plan f ($\beta = 0$), on ajoute l'effet de la *rotation* *différentielle* : variations de f avec la latitude. Le plan β est aussi utilisé près de l'équateur, où un plan f n'a pas beaucoup de sens.

Ces approximations de mouvement plan sont en principes bonnes tant que le mouvement n'a pas l'échelle planétaire : $L \ll a$.

3 Fluide stratifié, Boussinesq

L'atmosphère et l'océan sont deux fluides *stratifiés*, c'est à dire où la densité diminue avec l'altitude. Quand elle est importante, cette stratification va inhiber les mouvements verticaux, et tendre à diminuer le rapport d'aspect de l'écoulement.

D'autre part, les variations locales de densité ou température, si elles sont importantes dynamiquement, sont souvent faibles par rapport aux valeurs moyennes et peuvent parfois être négligées.

3.1 Décomposition des variables thermodynamiques

Les variables thermodynamiques p, T, ρ peuvent être décomposées entre un profil vertical moyen ou de référence, auquel s'ajoutent des écarts qui dépendent de la position et du temps. Il existe différentes façons d'effectuer cette décomposition. Pour la masse volumique ρ par exemple, on aura :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho(x, y, z, t) \\ &= \rho_0 + \hat{\rho}(z) + \rho'\left(x, y, z, t\right) \\ &= \bar{\rho}\left(z\right) + \rho'\left(x, y, z, t\right) \end{aligned} \tag{12}$$

La moyenne de $\hat{\rho}$ sur la verticale est nulle, ainsi que celle – spatiale ou temporelle – de ρ'. On définit de même des profils de pression en équilibre hydrostatique avec la masse volumique correspondante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}z} &= -\rho_0 g \\ \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z} &= -\bar{\rho} g \end{aligned} \tag{13}$$

Cette pression moyenne ne dépendant que de z. Dans l'atmosphère, la température moyenne est reliée à p et ρ par la relation des gaz parfaits.

3.2 Approximation de Boussinesq

L'*approximation de Boussinesq* consiste à supposer des faibles fluctuations de densité par rapport à la valeur moyenne ρ_0 :

$$\delta\rho(x, y, z, t) \ll \rho_0$$

Le résumé classique des conséquences de cette approximation est « on remplace ρ par ρ_0 sauf quand multipliée par g ». Plus précisément :

3.2.1 Équation du mouvement

Après les approximations traditionnelles, l'équation du mouvement (7) peut s'écrire avec la vitesse tri-dimensionnelle $\boldsymbol{v}$:

$$\left(\rho_0 + \delta\rho\right)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v}\right) = -\nabla\delta p + \delta\rho\boldsymbol{g}$$

On a utilisé que $\nabla p_0 = \rho_0\boldsymbol{g}$ pour éliminer ces 2 termes. En utilisant que $\delta\rho$ est petit par rapport à ρ_0 et en divisant par ρ_0, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v} = -\nabla\left(\frac{\delta p}{\rho_0}\right) + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\boldsymbol{g}$$

On peut garder δp et $\delta\rho$ comme variables, mais elles sont aussi remplacées par l'anomalie de *pression normalisée* $\phi = \delta p/\rho_0$ (qui a la dimension d'un potentiel en $m^2 \cdot s^{-2}$), et la *flottabilité* b (pour « buoyancy ») :

$$b = -g\frac{\delta\rho}{\rho_0} \tag{14}$$

On a finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v} = -\nabla\phi + b\widehat{\boldsymbol{k}} \tag{15}$$

3.2.2 Équation de continuité

En utilisant toujours $\delta\rho \ll \rho_0$, l'équation de continuité (3) s'écrit :

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Les 2 termes sont respectivement d'ordre de grandeur $\delta\rho U/L$ et $\rho_0 U/L$, le second est donc dominant, ce qui impose

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{16}$$

Il s'agit ici de la vitesse en 3 dimensions. Le fluide de Boussinesq est donc incompressible, ce qui est une des simplifications majeures de ce système. Attention, cela ne veut pas dire que $\delta\rho = 0$, les anomalies de densité sont obtenues par l'équation thermodynamique.

3.2.3 Équation thermodynamique

En conditions adiabatiques (pas de sources de chaleur, de sel, et compressibilité négligée), l'équation thermodynamique pour l'océan se réduit à $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = 0$. En multipliant par $\left(-g/\rho_0\right)$, on a aussi $\mathrm{d}b/\mathrm{d}t = 0$.

Système d'équations de Boussinesq

équation du mouvement	$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + f\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v} = -\nabla\phi' + b'\widehat{\boldsymbol{k}}$	(17)
continuité	$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$	(18)
thermodynamique	$\dfrac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}t} + wN^2 = 0 \quad ; \quad N^2 = \dfrac{\mathrm{d}\hat{b}}{\mathrm{d}z}$	(19)
définition de la flottabilité	$b = -\dfrac{g}{\rho_0}\delta\rho$	(océan)
	$b = \dfrac{g}{\theta_0}\delta\theta$	(atmos)

3.2.4 Profil vertical moyen

Il est souvent intéressant de distinguer dans les anomalies de densité le rôle du profil vertical moyen $\hat{\rho}(z)$ et des fluctuations ρ'. En définissant la pression normalisée et la flottabilité de façon un peu différente :

$$\phi' = \frac{p'}{\rho_0} \quad ; \quad b' = -g\frac{\rho'}{\rho_0}$$

les équations du mouvement (15) et de continuité (16) restent identiques (les gradients horizontaux de ϕ et ϕ' sont identiques, et sur la verticale $\mathrm{d}\hat{\phi}/\,\mathrm{d}z = \hat{b}$ par définition).

Pour l'équation thermodynamique, après avoir décomposé $b = \hat{b}(z) + b'$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}t} + wN^2 = 0 \quad ; \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}z} \tag{20}$$

Le terme wN^2, où N^2 est la *fréquence de Brundt-Väisälä*, donne les anomalies de densité dues au transport vertical du profil moyen.

3.3 Validité de l'équilibre hydrostatique

L'équilibre hydrostatique sur la verticale est en général bien vérifié dans le cas de mouvements à grande échelle. Le domaine de validité de cette hypothèse peut être exploré dans le cadre de Boussinesq.

Les différents termes de l'équation du mouvement vertical sont :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\,[1] \qquad \frac{\partial\phi'}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}\,[2] \qquad b' = -\frac{\rho'}{\rho}g\,[3]$$

L'équilibre hydrostatique entre b' et ϕ' sera vérifié si le premier terme [1] est petit devant les autres. Ce premier terme [1] est d'ordre UW/L, le deuxième peut être estimé à partir de l'équation du mouvement horizontal.

Cas classique Dans un écoulement classique, les forces de pression horizontales sont compensées par l'accélération relative :

$$\phi' \sim U^2$$

d'où [2] $\sim U^2/H$. D'autre part, l'équation de continuité donne $W \sim UH/L$ donc [1] $\sim U^2H/L^2$. Finalement, l'équilibre hydrostatique est vérifié si [1] $\ll$ [2] soit

$$\frac{H^2}{L^2} \ll 1$$

L'équilibre hydrostatique est donc relié ici à la petitesse du rapport d'aspect du mouvement (d'où également sa vérification en « eau peu profonde »).

Influence de la rotation Si le nombre de Rossby $Ro = U/fL$ est petit devant 1, les forces de pression horizontales sont cette fois compensées par Coriolis :

$$\phi' \sim fUL$$

donc [2] $\sim fUL/H = U^2/RoH$. On a aussi $W \sim RoUH/L$ donc [1] $\sim RoU^2H/L^2$, et finalement l'équilibre hydrostatique est vérifié si

$$Ro^2\frac{H^2}{L^2} \ll 1$$

La rotation accentue donc la validité de l'équilibre pour un rapport d'aspect donné, à la fois en donnant des vitesses verticales plus faibles, et en permettant des variations de pression plus grandes équilibrées par la force de Coriolis.

Influence de la stratification Une stratification élevée – telle que mesurée par N^2 – va inhiber les mouvements verticaux, et augmenter la validité de l'équilibre hydrostatique. En utilisant cette fois l'équation thermodynamique (20), on a

$$b' \sim N^2L\frac{W}{U}$$

La condition pour l'équilibre hydrostatique [1] $\ll$ [3] devient alors $N^2L^2/U^2 \gg 1$. En définissant le *nombre de Froude* $Fr = U/NH$, elle est finalement

$$Fr^2\frac{H^2}{L^2} \ll 1$$

3.4 Cas atmosphérique

Dans l'atmosphère, la densité ou la pression varient d'un ordre de grandeur sur la hauteur de la troposhère. L'approximation $\hat{\rho} \ll \rho_0$ n'est donc pas bonne, sauf si on se restreint à des mouvements de faible hauteur caractéristique (à l'intérieur de la couche limite par exemple).

On utilisera à la place l'*approximation anélastique*, qui consiste à supposer de faibles écarts au profil vertical moyen :

$$\rho'(x, y, z, t) \ll \bar{\rho}(z)$$

D'autre part, on utilisera plutôt la température potentielle θ que la densité ρ comme variable thermodynamique, car c'est θ qui est conservée pour des transformations adiabatiques. Ces deux variables sont reliées par la relation des gaz parfaits :

$$\frac{p}{\rho}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\kappa} = R\theta$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette relation, on obtient une relation entre les anomalies

$$\frac{p'}{\gamma\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \tag{21}$$

(on rappelle que $\gamma = c_p/c_v = 1/(1-\kappa)$). On peut arriver de même à une relation entre les gradients verticaux moyens :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma\bar{p}}\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{\bar{\theta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z} \\ -\frac{g\bar{\rho}}{\gamma\bar{p}} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{\bar{\theta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z} \end{aligned} \tag{22}$$

On a utilisé l'équilibre hydrostatique entre $\bar{p}$ et $\bar{\rho}$ entre les 2 lignes.

3.4.1 Équation du mouvement

L'équation du mouvement horizontal peut s'écrire de la même façon que (15), avec $\phi = p'/\bar{\rho}$. Sur la verticale, on doit faire attention aux variations verticales de $\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial z} - g\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \\ &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{p'}{\bar{\rho}^2}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z} - g\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \end{aligned}$$

En utilisant les relations (21) et (22) on peut éliminer les termes en ρ pour transformer cette équation en :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{p'}{\bar{\rho}\bar{\theta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z} + g\frac{\theta'}{\bar{\theta}}$$

Contrairement à ce qui se passe pour ρ ou p, les variations de θ sur la verticale sont faibles par rapport à sa valeur moyenne, le 2e terme du membre de droite peut donc être négligé. On obtient alors à nouveau une forme très similaire à celle de Boussinesq :

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} + b \quad ; \quad b = g\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \simeq g\frac{\theta'}{\theta_0}$$

3.4.2 Équation thermodynamique

L'équation thermodynamique pour l'atmosphère peut s'écrire simplement dans le cas adiabatique $\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t = 0$, soit en utilisant la décomposition de θ :

$$\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t} + w\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z} = 0$$

En multipliant par (g/θ_0), on obtient à nouveau une équation pour la flottabilité similaire à Boussinesq :

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + wN^2 = 0 \quad ; \quad N^2 = \frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z}$$

3.4.3 Équation de continuité

Dans l'approximation anélastique, le terme $\mathrm{d}\rho/\,\mathrm{d}t$ de l'équation de continuité (3) se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \sim w\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}$$

qui est d'ordre $\bar{\rho}W/H$ tout comme le terme de divergence de vitesse. Il n'est donc pas négligeable, et l'équation de continuité s'écrit finalement

$$w\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z} + \bar{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\left(\bar{\rho}\boldsymbol{v}\right) = 0 \tag{23}$$

Contrairement au cas de Boussinesq, l'équation de continuité de se réduit donc pas à un fluide incompressible, et il faut prendre en compte les variations verticales de la densité moyenne. Pour éliminer cet inconvénient, on se tournera souvent vers des coordonnées verticales type pression.

À part cette différence, les équations peuvent donc être rendues formellement similaires à celles du système de Boussinesq, avec des définitions un peu différentes de l'anomalie de pression ϕ et surtout de la flottabilité b et de N^2 qui sont basées sur θ et plus ρ.

4 Fluide tournant, approximation quasi-géostrophique

L'approximation géostrophique est un développement d'un système d'équations de base – équations primitives, eau peu profonde etc – dans la limite d'un petit nombre de Rossby. Elle est très utilisée en particulier pour la dynamique des tourbillon des latitudes moyennes. Plus précisément, on ajoute au fluide mince 3 hypothèses :

1. $Ro \ll 1$ (faible nombre de Rossby).
2. $\beta L \ll f$ (petites variations de f).
3. $\rho' \ll \bar{\rho}$ (petites fluctuations de ρ, T, p).

Les équations de base sont ensuite développées à l'ordre dominant en Ro en tenant compte de ces hypothèses.

4.1 Domaine de validité

Nombre de Rossby
Dans l'atmosphère, $Ro \ll 1$ est vérifié à partir d'une échelle de $L \gtrsim 1000$ km aux moyennes latitudes, et $L \gtrsim 10\,000$ km dans les tropiques. Dans l'océan, l'échelle minimale est de 1 à 10 km.

Variations de f
Avec $\beta \sim 10^{-11}\,\mathrm{m^{-1}{\cdot}s^{-1}}$ et $f \sim 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$ aux moyennes latitudes, la deuxième condition impose une échelle maximale $L \lesssim 1000$ km.

Variables thermodynamiques
La troisième condition peut s'exprimer de différentes façons : fluide homogène (eau peu profonde), Boussinesq...Dans le cas général, elle est toujours respectée en pratique dans l'atmosphère ou l'océan pour les grandeurs absolues ; mais une contrainte plus forte vient des dérivées verticales qui apparaissent multipliées par w dans plusieurs équations : on doit avoir $(\partial\theta'/\partial z) \ll (\mathrm{d}\bar{\theta}/\,\mathrm{d}z)$ (atmosphère) ou $(\partial\rho'/\partial z) \ll (\mathrm{d}\bar{\rho}/\,\mathrm{d}z)$ (océan), ou plus généralement

$$\frac{\partial b'}{\partial z} \ll \frac{\mathrm{d}\bar{b}}{\mathrm{d}z} = N^2$$

(voir section 3.2). L'équilibre hydrostatique donne que $b' \sim \phi'/H$; et l'équilibre géostrophique $\phi' \sim f_0 UL$. On a finalement :

$$\frac{\partial_z b'}{N^2} \sim f_0 U \frac{L}{H^2 N^2} = Ro \frac{L^2 f_0^2}{H^2 N^2} = Ro \frac{L^2}{L_d^2}$$

où L_d est homogène à une longueur appelée *rayon de déformation de Rossby*. Finalement, la condition de petites déviations du profil moyen est vérifiée si

$$Ro \frac{L^2}{L_d^2} \ll 1 \text{ avec } L_d = \frac{NH}{f}$$

Avec $N \sim 10^{-2}\,\mathrm{s^{-1}}$, le rayon de déformation est de l'ordre de 1000 km dans l'atmosphère, et de 10 à 100 km dans l'océan. Ro est petit à ces échelles donc l'approximation quasi-géostrophique peut s'appliquer.

On voit donc finalement que dans l'atmosphère, l'approximation quasi-géostrophique sera limitée à des échelles autour de $L \sim 1000$ km, alors qu'elle est également valable à des échelles plus petites dans l'océan. À des échelles trop petites, l'équilibre géostrophique n'est plus valable ($Ro \gtrsim 1$). À des échelles plus grandes que le rayon de déformation ($RoL^2/L_d^2 \gtrsim 1$), on utilisera les équations *géostrophiques planétaires* (section 4.4) qui prennent en compte le profil vertical complet et des grandes variations de f.

4.2 Équations approchées en coordonnées z

On va développer les différentes équations (en partant ici des équations primitives , section 2.1) en gardant les termes dominants en Ro (on prendra aussi $\beta L/f \sim Ro$).

Ordre 0 : équilibres
Les termes dominants dans les équations correspondent aux grands équilibres dynamiques : équilibre hydrostatique sur la verticale, et géostrophique sur l'horizontale. Le vent correspondant est appelé *vent géostrophique*. Ses composantes horizontales sont définies par :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \nabla_z p \tag{24}$$

La divergence horizontale du vent géostrophique est nulle, ainsi que sa composante verticale.

Ordre 1
On définit le vent *agéostrophique* par

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}$$

Sa vitesse horizontale est d'ordre $U_a = RoU$. Par la suite, on désignera par $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ la composante horizontale ; en particulier $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ est la divergence horizontale. La vitesse verticale totale fait également partie de la circulation agéostrophique, et est d'ordre 1 en Ro : $W \sim RoUH/L = U_a H/L$.

Termes d'advection
Dans les termes d'advection de la forme $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$, on pourra négliger sur l'horizontale la contribution du vent agéostrophique $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ par rapport à celle de $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}$.

L'advection verticale $w\partial/\partial z$ est d'ordre $W/H \sim RoU/L$ et peut aussi être négligé par rapport à l'advection horizontale *si elle agit sur la même variable*. La forme résultante de la dérivée matérielle, parfois appelée *dérivée géostrophique*, est notée

$$\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} \cdot \nabla\right) \tag{25}$$

Attention, il faut quand même conserver l'advection verticale quand elle opère sur un profil moyen comme $\bar{p}$, $\bar{\rho}$ ou $\bar{T}$ car il n'y a pas d'advection horizontale correspondante et si $W/H \ll U/L$, on a aussi $\partial_z b' \ll \mathrm{d}b/\mathrm{d}z$ (section 4.1).

Les équations résultantes dans l'atmosphère, auxquelles il faut ajouter l'équation d'état, sont résumées dans l'encadré. Dans l'océan, on utilise en général Boussinesq, donc l'équation de continuité se réduit à $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

4.3 Vent agéostrophique

On peut isoler le vent agéostrophique $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ en prenant le produit vectoriel de l'équation du mouvement horizontal (27) avec $\widehat{\boldsymbol{k}}$. En négligeant le terme en β, on obtient :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{f_0} \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}\right]$$

Équations Quasi-Géostrophiques, coordonnées z

équilibre hydrostatique	$\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$	(26)
mouvement horizontal	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d_g} \boldsymbol{v}_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} + f_0 \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \beta y \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = \boldsymbol{0} \\ f_0 \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = -\dfrac{1}{\bar{\rho}} \nabla_z p \end{cases}$	(27)
continuité	$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \dfrac{1}{\bar{\rho}} \dfrac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0$	(28)
thermodynamique	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d_g} T}{\mathrm{d}t} + w \left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}z} + \dfrac{g}{C_p} \right) = \dfrac{\dot{q}}{C_p} \\ \dfrac{\mathrm{d_g} \theta}{\mathrm{d}t} + w \dfrac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\theta}{T} \dfrac{\dot{q}}{C_p} \end{cases}$	(29)

Le terme d'évolution temporelle peut être transformé en utilisant la définition du vent géostrophique (24). Le terme d'advection est lui projeté dans le repère de Freinet [1] pour mieux mettre en évidence son origine. On arrive à :

$$f_0 \boldsymbol{v}_\mathrm{a} = \underbrace{-\frac{1}{\bar{\rho} f_0} \nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)}_{[1]} \quad \underbrace{-\frac{V_g^2}{R} \hat{\boldsymbol{t}}}_{[2]} \quad \underbrace{+V_g \frac{\partial V_g}{\partial s} \hat{\boldsymbol{n}}}_{[3]} \tag{30}$$

Le terme [1] est appelé *vent isallobarique*, il est dirigé suivant le gradient de la tendance de pression, des régions où la pression augmente vers celles où la pression diminue (ou combinaison équivalente). Cette composante agéostrophique permet d'ajuster le vent total pour maintenir l'équilibre géostrophique avec le nouveau gradient de pression.

Le terme [2] est lié à la courbure de la trajectoire. Comme $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ est parallèle à $\boldsymbol{v}_\mathrm{g}$, la vitesse du vent total va être modifiée, suivant un équilibre appelé *vent du gradient*.

Le dernier terme [3] vient de la variation du vent géostrophique (donc du gradient de pression) le long de la trajectoire. Si la vitesse augmente ($\partial_s V_g > 0$), $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ est dirigé vers les basses pressions. Comme pour [1], la composante agéostrophique va modifier le module de la vitesse et l'ajuster au nouveau gradient de pression.

4.4 Équations géostrophiques planétaires

Ce système d'équations est valide pour l'étude des mouvements à très grande échelle : $L \gg L_d$ et $\beta L \sim f$, Ro restant petit. Il est surtout utilisé dans l'océan pour l'étude de la circulation de gyre par exemple ; on utilisera donc l'approximation de Boussinesq (section 3.2).

1. vecteurs $\hat{\boldsymbol{t}}$ et $\hat{\boldsymbol{n}}$ tangent et normal à la trajectoire

Dans l'équation du mouvement horizontal, on doit conserver les variations complètes de f même à l'ordre dominant. L'équation du mouvement se réduit alors à l'équilibre géostrophique :

$$f\hat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathrm{g}} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p \tag{31}$$

Attention, on a ici f et pas f_0. La divergence horizontale du vent géostrophique n'est alors plus identiquement nulle à cause des variations méridiennes de f, et l'équation de continuité s'écrit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\beta}{f} v_g = 0 \tag{32}$$

On retrouve l'*équilibre de Svredrup* dans le cas où w est un pompage d'Ekman en surface. Contrairement au cas quasi-géostrophique, on a ici $W/H \sim U/L$. On doit donc dans l'équation thermodynamique conserver les variations complètes dans le terme d'advection verticale :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ (océan) } \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ (atmosphère)} \tag{33}$$

dans le cas adiabatique. Les équations (31, 32, 33) forment avec l'équilibre hydrostatique le système complet. Le seul terme d'évolution temporelle se trouve dans l'équation thermodynamique.

5 Coordonnées pression

L'équilibre hydrostatique étant très bien vérifié à grande échelle (dans l'atmosphère comme l'océan), on peut utiliser la pression comme coordonnée pour repérer la position d'une parcelle sur la verticale, la pression diminuant toujours quand z augmente. Les surfaces horizontales ($z = \text{cst}$) sont remplacées par des surfaces à pression constantes, et le rôle de la variable pression p est alors joué par le *géopotentiel* ϕ :

$$\phi = \frac{1}{g_0}\int_0^z g(h)dh \approx g_0 z \tag{34}$$

On rencontre aussi parfois l'*altitude géopotentiel* Z définie par $g_0 Z = \phi$ qui a la dimension de z. Le gros avantage des coordonnées pression est d'éliminer la densité ρ des équations, en particulier l'équation de continuité devient – sans approximation – $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Elles sont donc très utilisées pour l'atmosphère, beaucoup moins pour l'océan où l'approximation de Boussinesq a sensiblement le même effet.

5.1 Passage aux coordonnées pression

On décrit ici comment transformer les équations en passant de la coordonnée verticale z à p. La technique peut aussi être utilisée pour d'autres coordonnées verticales possibles comme $\ln p$ et θ, l'essentiel étant que la variation avec z soit monotone.

Gradient horizontal, forces de pression

Les dérivées « horizontales » (par rapport à x ou y) doivent être maintenant prises suivant une surface isobare. Le passage d'un gradient à z constant à un gradient à pression constante pour une variable X se fait par la formule générale :

$$\nabla_z X = \nabla_p X - \partial_z X \cdot \nabla_p z$$

Dans le cas particulier du calcul des forces de pression horizontales, $X = p$ et on obtient en utilisant l'équilibre hydrostatique :

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_z p = -\nabla_p \phi$$

Vitesse verticale

Les dérivées verticales (par rapport à z) deviennent des dérivées par rapport à p. La vitesse verticale en coordonnées p est elle égale à $\omega = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$.

Équation de continuité

Le plus simple pour l'équation de continuité est de repartir de la masse d'une parcelle d'air. En coordonnée p, elle s'écrit $\delta m = \delta x \delta y \delta p / g$ (toujours grâce à l'équilibre hydrostatique). En écrivant la conservation de δm au cours du mouvement, il vient avec g constant que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

5.2 Approximation quasi-géostrophique

En suivant les hypothèses de l'approximation quasi-géostrophique, la vitesse verticale ω devrait s'écrire

$$\omega = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{\mathrm{d_g}p}{\mathrm{d}t} + w \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}z}$$

Le terme $\mathrm{d_g}p/\mathrm{d}t$ est d'ordre $p'U/L$, mais il se réduit en fait à $\partial_t p$: l'advection de pression par le vent géostrophique est identiquement nulle. Le terme d'advection verticale est lui d'ordre $\bar{p}W/H$, il est donc dominant si $\frac{\partial_z p'}{\mathrm{d}\bar{p}/\mathrm{d}z} \ll Ro$, ce qui est le cas dans l'atmosphère. En utilisant l'équilibre hydrostatique, on peut finalement écrire

$$\omega \simeq -\rho g w \left[+ \frac{\partial p}{\partial t} \right] \tag{35}$$

Le terme entre crochet étant d'un ordre inférieur, il est utilisé seulement quand $w = 0$, en surface par exemple.

Le reste des équations s'analyse de la même manière qu'en coordonnées z ; on élimine ρ en la remplaçant par p/RT. En comparant le résultat final encadré avec la version utilisant Boussinesq, on voit qu'il est formellement identique sauf pour l'équilibre hydrostatique.

Équations Quasi-Géostrophiques, coordonnées pression

équilibre hydrostatique	$\dfrac{\partial \phi}{\partial p} = -\dfrac{RT}{P}$	(36)
mouvement horizontal	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d_g} \boldsymbol{v}_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t} + f_0 \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \beta y \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = \boldsymbol{0} \\ f_0 \widehat{\boldsymbol{k}} \wedge \boldsymbol{v}_\mathrm{g} = -\nabla_p \phi \end{cases}$	(37)
continuité	$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{a} + \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0$	(38)
thermodynamique	$\dfrac{\mathrm{d_g} \theta}{\mathrm{d}t} + \omega \dfrac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}p} = \dfrac{\theta}{T} \dfrac{\dot{q}}{C_p}$	(39)