

Dynamique des fluides géophysiques

TD N°6: Fluide Stratifié

On cherche dans ce TD à estimer le domaine de validité de l'équilibre hydrostatique, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. On rappelle le système d'équations :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f\hat{k} \times \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi' \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = b' - \frac{\partial \phi'}{\partial z} \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{db'}{dt} + wN^2 = 0 \quad (4)$$

On a noté \vec{v} la vitesse horizontale, $b' = -g\rho'/\rho_0$ la flottabilité et $\phi' = p'/\rho_0$. f et N^2 sont considérés constants. L'équilibre hydrostatique sera valide si dans l'équation du mouvement vertical, on a

$$\frac{dw}{dt} \ll \frac{\partial \phi'}{\partial z} \quad (5)$$

On cherchera en particulier à exprimer cette condition en fonction du rapport d'aspect de l'écoulement $\varepsilon = H/L$, et d'autres grandeurs caractéristiques.

I Cas classique

On considère d'abord un mouvement à petite échelle ou non tournant, donc à nombre de Rossby grand ($Ro \gg 1$).

1. À l'aide de l'équation du mouvement horizontal (1), estimer l'ordre de grandeur des variations de pression ϕ' .
2. Quel est l'ordre de grandeur du terme dw/dt ?
3. À partir de l'équation de continuité (3), trouver une relation entre les vitesses horizontale et verticale W et U .
4. En déduire une condition de validité de (5) utilisant ε .

II Fluide tournant

On considère maintenant un fluide tournant, dominé par Coriolis ($Ro \ll 1$).

1. Trouver le nouvel ordre de grandeur de ϕ' , toujours avec l'équation du mouvement horizontal. On l'exprimera en fonction de Ro .

2. Quel est l'ordre de grandeur de la divergence horizontale $\text{div } \vec{v}$ quand on est proche de l'équilibre géostrophique? En déduire la relation entre W et U dans ce cas.
3. Quelle est la nouvelle condition de validité de (5)?

III Fluide Stratifié

On regarde maintenant l'influence de la stratification moyenne, représentée par la fréquence N .

1. Trouver l'ordre de grandeur des fluctuations de flottabilité b' , en utilisant l'équation thermodynamique (4).
2. L'équilibre hydrostatique est vérifié si

$$\frac{dw}{dt} \ll b'$$

Donner une condition. On pourra faire apparaître le nombre de Froude $Fr = U^2/H^2N^2$.

IV Oscillations verticales

On considère maintenant des mouvements essentiellement verticaux, soit $\varepsilon \gg 1$ (On a alors aussi $Ro \gg 1$).

1. Montrer qu'on a alors dans l'équation (2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \ll \frac{dw}{dt}$$

(on peut par exemple exprimer ϕ en fonction de U puis de W).

2. En déduire qu'une parcelle qui n'est pas au repos effectue des oscillations verticales avec la pulsation N .