Vorticité, vorticité potentielle

1 Circulation et vorticité

1.1 Définitions

Circulation On considère un contour fermé C dans un écoulement. La *circulation* le long de C est alors l'intégrale le long de C de la vitesse tangente à C. En notant $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ un vecteur tangent à C en un point M de C, de norme petite $\mathrm{d}l$, la circulation vaut

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1}$$

Vorticité La *vorticité* est définie comme le rotationnel de la vitesse : $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$. Elle est reliée à la circulation par le théorème du rotationnel :

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2}$$

où S est une survace s'appuyant sur C, et $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ un vecteur normal à S de norme $\mathrm{d}S$ proportionnelle à un petit élément de surface.

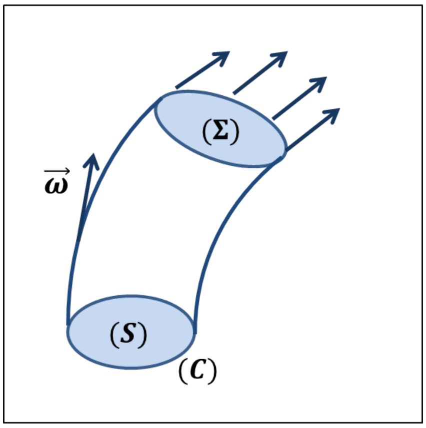

Figure 1 – Schéma d'un tube de vorticité s'appuyant sur un contour C. Les parois sont tangentes au vecteur vorticité ; le flux de vorticité à travers S et Σ est donc identique.

Tube de vorticité Une *ligne de vorticité* est définie de façon analogue à une ligne de courant : c'est à un instant donné une courbe qui est tangente en tout point à la vorticité locale (son équation est donnée en 2D par $\mathrm{d}x/\omega_x = \mathrm{d}y/\omega_y$). Un *tube de vorticité* s'appuyant sur un contour fermé C est composé de l'ensemble des lignes de vorticité passant par C (figure 1).

Pour un contour fermé quelconque sur les parois du tube de vorticité, délimitant une surface Σ, on peut utiliser l'égalité (2) pour la surface composée de Σ et des parois du tube. On trouve alors que le flux de vorticité à travers Σ est égal à celui à travers S, et à la circulation le long de C. On a donc finalement que dans un tube de vorticité

– La circulation le long d'un contour fermé sur les parois est indépendante du contour.
– Le flux de vorticité à travers une surface interceptant le tube est indépendant de cette surface.

1.2 Théorème de Kelvin

On s'intéresse à la circulation Γ le long d'un contour *matériel* C. L'évolution de Γ s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\big)}{\mathrm{d}t}$$

En utilisant que $\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\big) / \mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}$, on voit que le 2e terme est identiquement nul. Pour le 1er, on utilise l'équation du mouvement en négligeant les frottements :

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint_C \left(\boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\nabla P\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_C \frac{\mathrm{d}P}{\rho}$$

Le terme restant lié aux forces de pression est appelé *terme barocline*. L'intégrale de $\mathrm{d}P$ – donc des forces de pression – le long de C est identiquement nulle, mais celle de l'*accélération* due à ces forces $-\,\mathrm{d}P/\rho$ ne l'est pas forcément : pour une même variation de pression l'accélération sera plus forte pour un fluide moins dense. Le terme barocline peut également s'exprimer comme un flux en utilisant le théorème du rotationnel :

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}P}{\rho} = \iint_S \left(\nabla\frac{1}{\rho} \times \nabla P\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Le *vecteur barocline* $\boldsymbol{B} = -\nabla(1/\rho) \times \nabla P$ est nul quand les surfaces isobares et isopycnes [1] sont confondues, autrement dit si densité et pression ne sont pas indépendantes [2]. On parle alors de *fluide barotrope*, dans lequel la circulation le long d'un contour matériel est donc conservée : $\mathrm{d}\Gamma/\,\mathrm{d}t = 0$.

Toujours pour un écoulement barotrope, on peut s'intéresser à l'évolution d'un tube de vorticité. La circulation le long d'un contour matériel étant conservée, l'ensemble des contours matériels constituant le tube à l'instant initial constitue également un tube de vorticité après un certain temps – à une position différente, mais avec le même flux de vorticité. Le *tube de vorticité est une surface matérielle*, qui *conserve sa circulation*. Ce résulat est valable pour un fluide barotrope sans frottements, mais peut être utilisé pour interpréter l'évolution de la vorticité de l'écoulement.

1.3 Expressions de la vorticité

Écoulement 2D

Dans l'atmosphère et l'océan, les composantes horizontales de la vorticité sont plus grandes que la composante verticale ; cependant c'est cette dernière qui est en pratique la seule

1. isopycne=densité constante
2. Dans l'atmosphère, cette condition peut s'exprimer avec les isobares et isothermes, en utilisant la loi des gaz parfaits.

importante dynamiquement pour les mouvements à grande échelle. Cette composante verticale est notée $\zeta = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Plus généralement, pour un écoulement bidimensionnel, le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est orienté dans la 3e dimension et on peut écrire $\boldsymbol{\omega} = \zeta\widehat{\boldsymbol{k}}$.

L'expression de ζ dans différents systèmes de coordonnées peut être retrouvée en considérant la circulation le long d'un contour infinitésimal :

$$\textit{Cartésiennes} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\textit{Curvilignes} \quad \zeta = \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

Fonction de courant, inversion

Pour un écoulement bidimensionnel, la partie non-divergente de l'écoulement peut s'exprimer comme

$$\boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{k}} \times \nabla\Psi$$

où Ψ est la fonction de courant [3]. On obtient alors (composantes ou identité vectorielle)

$$\zeta = \delta\Psi \tag{3}$$

Cette équation peut être résolue pour trouver Ψ connaissant ζ ; on parle d'*inversion* de la vorticité. Ψ permet ensuite de retrouver le champ de vitesse.

Une propriété importante du champ inversé est sa linéarité : si on décompose la vorticité en deux parties $\zeta(x, y) = \zeta_1 + \zeta_2$ alors la fonction de courant de l'écoulement complet sera $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. On peut ainsi isoler l'influence de différentes structures de vorticité sur l'écoulement.

Référentiel Terrestre

La vitesse absolue $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ se décompose en $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$, où $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ est la vitesse par rapport à la surface et $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM}$ la vitesse d'entrainement d'un point immobile par rapport à la surface. En prenant le rotationnel, il vient que

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}} = 2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}$$

où $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}} = \nabla \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ est la *vorticité relative* et $\nabla \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = 2\boldsymbol{\Omega}$ la *vorticité planétaire* due à la rotation de la Terre (de façon générale, lors d'une rotation solide à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$, la vorticité vaut $2\boldsymbol{\Omega}$). Pour la composante verticale, on obtient de même

$$\zeta_a = f + \zeta_r$$

Le paramètre de Coriolis $f = 2\Omega \sin\varphi = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot 2\boldsymbol{\Omega}$ est donc la composante verticale de la vorticité planétaire.

3. L'écoulement peut également avoir une composante *potentielle* $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$ mais celle-ci a une vorticité nulle

Vorticité quasi-géostrophique
La vorticité relative ζ_r a pour ordre de grandeur U/L, elle est donc d'ordre Ro par rapport à la vorticité planétaire f. À l'ordre 0, la vorticité absolue vaut donc simplement

$$\zeta_a^0 = f_0$$

À l'ordre suivant, on a les variations de f et la vorticité relative due au vent géostrophique $\zeta_g = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}_\mathrm{g})$, la vorticité agéostrophique d'ordre U_a/L étant d'un ordre Ro supplémentaire :

$$\zeta_a^1 = \beta y + \zeta_g$$

En utilisant l'expression du vent géostrophique en coordonnées pression

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{g} = \frac{1}{f_0} \widehat{\boldsymbol{k}} \times \nabla \phi$$

on obtient l'expression pour ζ_g :

$$\zeta_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \tag{4}$$

2 Équation de la vorticité

Une équation d'évolution pour la vorticité peut être obtenue à partir de l'équation du mouvement, en prenant son rotationnel ($\nabla \times \cdot$), puis le produit scalaire avec $\widehat{\boldsymbol{k}}$ pour la composante verticale.

2.1 Équation générale

L'équation du mouvement dans le référentiel absolu peut s'écrire en manipulant le terme $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \left(v^2\right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho} \nabla P$$

En prenant le rotationnel, il vient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

On peut utiliser l'identité vectorielle suivante pour développer le 2e terme :

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \nabla \cdot \omega$$

La divergence de $\boldsymbol{\omega}$ est nulle, et $\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} / \mathrm{d}t$. On obtient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \underset{[1]}{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}} - \underset{[2]}{\boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v}} + \underset{[3]}{\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p} \tag{5}$$

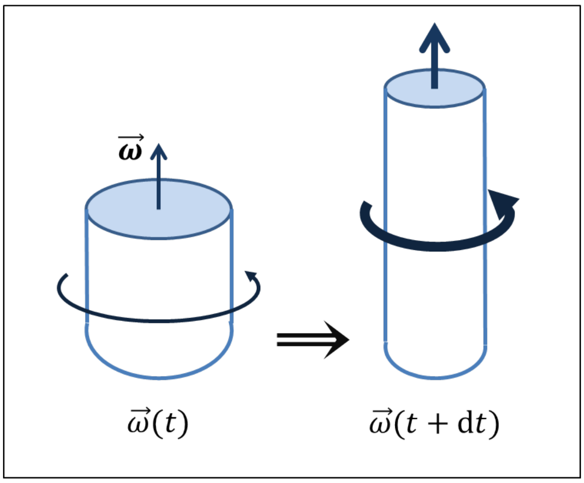

FIGURE 2 – Schéma du mécanisme d'*étirement de vortex* : tube de vorticité entre deux surfaces matérielles aux temps t et $t + \mathrm{d}t$, avec étirement dans la direction sans changement de volume. Le flux de vorticité étant constant, la vorticité doit augmenter.

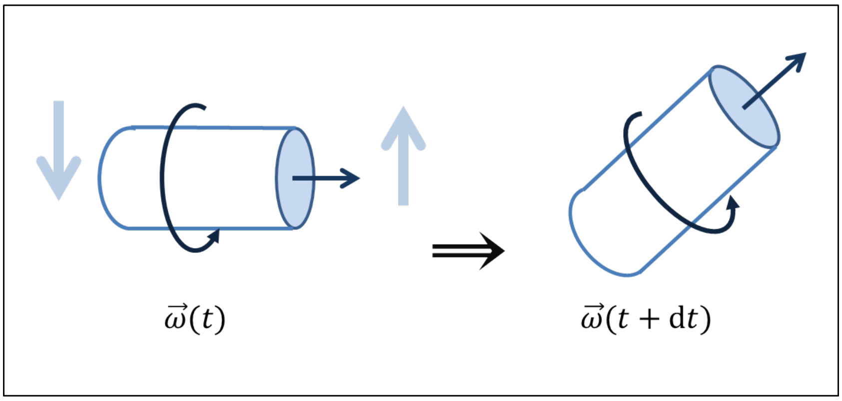

FIGURE 3 – Schéma du mécanisme de *basculement de vortex* :tube de vorticité entre deux surfaces matérielles aux temps t et $t + \mathrm{d}t$. La vorticité est initialement purement horizontale. Après entrainement par la vitesse verticale, indiquée en flèches gris clair, la vorticité acquiert une composante verticale.

Le terme [3] est le *terme barocline* déjà rencontré, qui est une source de vorticité quand les gradients de p et ρ ne sont pas alignés. Le terme [2] est proportionnel à la divergence de la vitesse ; il est nul pour un écoulement incompressible ou peut être éliminé en remplaçant $\boldsymbol{\omega}$ par la vorticité *massique* $\boldsymbol{\omega}/\rho$. Le terme [1] peut être compris comme un effet de la déformation des tubes de vorticité – qui sont des volumes matériels (section 1.2) – par l'écoulement. On distingue deux mécanismes :

Étirement de vortex (figure 2.1). Les termes de la forme $\omega_z \partial_z v_z$ impliquent un étirement – ou contraction – par l'écoulement dans la direction de $\boldsymbol{\omega}$, et donc si le fluide est incompressible une contraction opposée des tubes de vorticité. Le flux de vorticité à travers une section du tube étant constant, si la section diminue la vorticité elle-même doit augmenter. Ce mécanisme est analogue à celui de la conservation du moment cinétique, ici autour de l'axe du tube.

Basculement de vortex (figure 3). Les termes de la forme $\omega_x \partial_x v_z$ impliquent eux un cisaillement dans la direction de $\boldsymbol{\omega}$ de la vitesse perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$. On a alors une rotation, ou *basculement*, de l'axe du tube de vorticité et de la direction de $\boldsymbol{\omega}$ sans changement de son amplitude.

Ces deux mécanismes interviennent dans l'apparition de tourbillons de petite échelle, les tornades par exemple : le basculement de la vorticité horizontale ambiante due au cisaillement vertical de vent près de la surface apporte au tourbillon une composante verticale initiale. Celle-ci est ensuite amplifiée par étirement : convergence horizontale près du sol et ascendance.

En présence de diffusion à petite échelle de la forme $\nu\nabla^2\boldsymbol{v}$, deux termes supplémentaires apparaissent dans l'équation (5) : la *diffusion* de vorticité $\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$, et un terme de dissipation proportionnel au carré du cisaillement de vitesse.

2.2 Équation quasi-géostrophique

On s'intéresse maintenant à l'équation d'évolution de la composante verticale ζ, dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique. En utilisant les coordonnées pression ou Boussinesq dans l'océan, le terme barocline et celui de divergence s'éliminent. En prenant le produit scalaire de (5) avec $\widehat{\boldsymbol{k}}$, il reste :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\zeta_r + f\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a} \cdot \nabla\right) w$$

où w est la vitesse verticale. On peut séparer les contributions des composantes verticale et horizontale de $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{a}$ au second membre. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\zeta_r + f\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\zeta_r + f\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{h}}{\partial z} \times \nabla w\right) \tag{6}$$

Une analyse en ordre de grandeur montre que le terme dominant au second membre est celui où apparait le facteur de Coriolis : $f\partial_z w \sim f_0 U_a/L \sim U^2/L^2$; tous les autres sont plus petits au moins d'un facteur Ro. Au premier membre, on a

$$\frac{\mathrm{d}\left(\zeta_r + f\right)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{\mathrm{d_g}\zeta_g}{\mathrm{d}t} + \beta v_g$$

les deux termes étant du même ordre U^2/L^2 si $\beta L \sim fRo$. L'équation de la *vorticité quasi-géostrophique* s'écrit finalement :

$$\begin{gathered}\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\left(\boldsymbol{v}_\mathrm{g} \cdot \nabla\right)\zeta_g - \beta v_g + f_0\frac{\partial w}{\partial z}\\ \text{ou}\\ \frac{\mathrm{d_g}\left(\zeta_g + f\right)}{\mathrm{d}t} = f_0\frac{\partial w}{\partial z}\end{gathered} \tag{7}$$

La première forme met l'accent sur l'évolution de ζ_g. Les trois termes au second membre sont l'advection par le vent géostrophique de vorticité relative, de vorticité planétaire, et l'étirement de la vorticité planétaire. La seconde forme exprime la conservation de ζ_a, avec uniquement le terme d'étirement au second membre. Ce dernier peut aussi s'exprimer à partir de l'équation de continuité comme $f_0 \partial_z w = -f_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{a}$.

En coordonnées pression, on remplace juste $\partial w / \partial z$ par $\partial \omega / \partial p$. L'équation (7) peut être également obtenue à partir de l'équation du mouvement horizontal quasi-géostrophique.

3 Vorticité potentielle

La vorticité potentielle permet de définir un invariant dynamique basé sur la vorticité. Le principe est d'inclure le terme d'étirement de vortex dans la vorticité en utilisant l'équation de conservation de la masse.

3.1 Fluide homogène

Le cas le plus simple est celui d'un écoulement à densité uniforme ρ_0, de hauteur totale $H(x, y, t)$. Le gradient de pression est alors indépendant de z, donc la vitesse horizontale aussi. L'équation (6) pour la composante verticale de la vorticité se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\zeta_r + f\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\zeta_r + f\right) \frac{\partial w}{\partial z}$$

La vorticité étant elle aussi indépendante de z, on peut facilement intégrer cette équation sur toute la hauteur H. On obtient :

$$H \frac{\mathrm{d}\left(\zeta_r + f\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\zeta_r + f\right) \left(w_s - w_f\right)$$

où w_s est la vitesse verticale en surface, et w_f au fond. En utilisant que $(w_s - w_f) = \mathrm{d}H / \mathrm{d}t$, l'équation précédente peut s'exprimer comme la conservation d'une quantité appelée *vorticité potentielle* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\zeta_r + f}{H} \right) = 0 \tag{8}$$

On voit que si la hauteur totale H d'une colonne d'eau change augmente au cours de son déplacement, la vorticité doit elle aussi augmenter : on retrouve l'effet de l'étirement. Ce résultat peut être étendu au cas d'un écoulement géostrophique barotrope, en remplaçant H par Δp.

3.2 Vorticité potentielle d'Ertel

Dans le cas général, on peut obtenir une définition locale de la vorticité potentielle. On considère pour cela deux surfaces iso-θ séparées par une petite différence $\delta\theta$, et deux petits contours situés sur ces surfaces et faisant partie d'un même tube de vorticité. On note δS la surface délimitée par les contours, $\hat{\boldsymbol{n}}$ le vecteur unitaire normal aux iso-θ, et δl la distance entre les 2 surfaces.

Dans le cas où l'écoulement est *adiabatique*, θ est conservée donc $\delta\theta$ est constante et les contours restent sur leur surface iso-θ. La *masse* du volume matériel ainsi délimité est conservée :

$$\delta m = \rho \delta S \delta l = \text{cste}$$

D'autre part, comme $\theta \propto T p^{-\kappa}$, T et p ne sont pas indépendants sur une surface à θ constante et le terme barocline s'annule. La circulation le long des contours et le flux de vorticité sont donc eux aussi conservés. Ce flux s'écrit

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, \delta S = \text{cste}$$

En regroupant ces 3 quantités conservées, on obtient après avoir éliminé δS que

$$\frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\, \delta\theta}{\rho \delta l} = \text{cste}$$

On peut simplifier cette formule en utilisant que $(\delta\theta/\delta l)\hat{\boldsymbol{n}} \approx \nabla\theta$. On obtient alors une quantité conservée appelée *vorticité potentielle d'Ertel* :

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\theta}{\rho} = \text{cste} \tag{9}$$

Cette conservation est donc vérifiée dans le cas adiabatique et sans frottements. La vorticité potentielle d'Ertel utilise la composante de la vorticité normale aux iso-θ. En faisant l'approximation que ces surfaces sont quasi-horizontales, on obtient les formes approchées

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\theta}{\rho} \approx \frac{(\zeta + f)}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z} = -g\,(\zeta + f)\,\frac{\partial\theta}{\partial p}$$

On voit bien le lien avec la forme barotrope (8), l'écart $\mathrm{d}z$ entre 2 niveaux de θ jouant localement le rôle de H. Dans l'océan, on peut utiliser la densité ou densité potentielle à la place de θ, l'important étant d'avoir à la fois une quantité conservée et l'annulation du terme barocline.

3.3 Vorticité potentielle quasi-géostrophique

Un invariant analogue à la vorticité potentielle peut être dérivé dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique. Pour cela, on va éliminer la vitesse verticale entre l'équation de la vorticité et l'équation thermodynamique. On fait ici la démonstration pour l'atmosphère en coordonnées pression.

En se plaçant dans le cas adiabatique, la vitesse verticale donnée par l'équation thermodynamique vaut :

$$\omega = -\frac{1}{\mathrm{d}\bar{\theta}/\,\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d_g}\theta'}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

On notera par la suite $\mathrm{d}\bar{\theta}/\,\mathrm{d}p = \bar{\theta}_p$. On prenant la dérivée verticale, on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\bar{\theta}_p}\frac{\mathrm{d_g}\theta'}{\mathrm{d}t}\right)$$

Si on développe le second membre, le terme suivant apparait :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathrm{d_g}\theta'}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \theta'}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_\mathrm{g}}{\partial p}\right)\cdot \nabla_p \theta$$

or l'équilibre du vent thermique indique que le dernier terme est nul. En utilisant également que $\mathrm{d}_g\bar{\theta}_p/\,\mathrm{d}p = 0$, on a finalement

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}_p}\right)\right]$$

En remplaçant dans l'équation de la vorticité (7), on a l'équation de conservation de la *vorticité potentielle quasi-géostrophique* q :

$$\frac{\mathrm{d_g}q}{\mathrm{d}t} = 0\ , \quad q = f + \zeta_g + f_0\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}_p}\right) \tag{11}$$

C'est une forme linéarisée, qui n'a d'ailleurs pas la même dimension que la vorticité d'Ertel. Les trois termes de q représentent la *vorticité planétaire*, la *vorticité relative géostrophique* et l'impact de *l'étirement* donné par les changements de stabilité $(\partial\theta'/\partial p)$.

Le terme dominant est f_0, c'est d'ailleurs uniquement sur lui qu'agit l'étirement ; mais il n'a pas d'impact dynamique : c'est un terme constant et dire qu'il est conservé n'apporte rien. À l'ordre suivant, il est intéressant de comparer la vorticité géostrophique et le terme d'étirement. On a $\zeta_g \sim U/L$, et on a vu dans le chapitre précédent que

$$\frac{\partial \theta'}{\partial p} \sim Ro\frac{L^2}{L_d^2}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}p}$$

avec $L_d = NH/f$ le rayon de déformation de Rossby. Le terme d'étirement est donc d'ordre $f_0 Ro L^2/L_d^2$, soit d'ordre L^2/L_d^2 par rapport à ζ_g. Pour une taille d'écoulement petite par rapport à L_d, le terme d'étirement est négligeable et on a *conservation de la vorticité absolue*. Pour une taille grande devant le rayon de Rossby, c'est *la vorticité relative peut être négligée*.

Il est pratique d'écrire la valeur de q en utilisant le géopotentiel ϕ comme variable principale. En utilisant l'équation de l'équilibre hydrostatique, on peut réécrire la valeur de ω (10) comme :

$$\omega = -\frac{1}{S^2}\frac{\mathrm{d_g}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)$$

Le paramètre S^2 est une mesure de la stabilité verticale, analogue à N^2 en coordonnées pression :

$$S^2 = -\frac{R\bar{T}}{p\bar{\theta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}p} = \frac{N^2}{(\rho g)^2}$$

En utilisant en plus l'expression (7) de ζ_g, on arrive de la même façon qu'avant à la valeur de q :

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{S^2}\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) \tag{12}$$

Dans l'océan, on arrive à une forme très similaire en utilisant les coordonnées z :

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \tag{13}$$

la variable ϕ étant ici définie comme $\phi = \delta p / \rho_0$. On utilise également la *fonction de courant géostrophique* $\psi = \phi / f_0$.

Inversion de la vorticité potentielle

L'équation précédente ressemble à une équation pour le laplacien de ϕ à 3 dimensions, où la dimension verticale a été redimensionnée d'un facteur N/f. Connaissant la valeur de q en tout point à un instant donné, on peut alors réaliser une *inversion* de q pour obtenir le champ de ϕ. Une fois ϕ connu, on peut retrouver toutes les autres variables :

- $\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}}$ puis ζ_g par l'équilibre géostrophique
- θ ou T par l'équilibre hydrostatique

L'évolution temporelle de q est obtenue simplement par transport par le vent géostrophique : $\frac{\mathrm{d_g} q}{\mathrm{d}t} = 0$. Attention, l'inversion complète nécéssite des conditions aux limites appropriées et parfois compexes, en surface notamment.