Outils mathématiques pour scientifiques

Cours

Marie-Christine Angonin

2011-2012

Table des matières

Préface

Le but du cours est d'introduire et d'approfondir certaines notions mathématiques utilisées dans les cours de physique, biologie ou chimie. Les connaissances de mathématiques correspondantes seront supposées assimilées pour l'examen.

Dans le présent fascicule nous procédons à de nombreux rappels qui constituent l'essentiel des développements qui suivent. Il est donc fortement conseillé de se reporter aussi aux cours de mathématiques du lycée.

Symboles de comparaison

- Nous utiliserons parfois le symbole " $:=$ " au lieu de " $=$ ".
  Par exemple, définissant l'accélération nous écrirons " $\gamma_x := d^2x/dt^2$ ". Aucune loi n'est exprimée par cette égalité, elle ne représente pas une équation ni un résultat. C'est seulement **une définition**.
  Par contre pour présenter la loi fondamentale de la dynamique (la seconde loi de Newton) nous écrirons " $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ ".
  Ainsi $x^3 - 7 := 0$ doit être considéré comme la relation de définition de x, tandis que $x^3 - 7 = 0$ est une équation à résoudre dont la solution devra être notée x_0 par exemple ("Soit x_0 la solution de l'équation $x^3 - 7 = 0$" s'écrit "$x_0^3 - 7 := 0$".).
  Lors de démonstrations, nous ferons également usage de " $:=$ " pour souligner que telle égalité est bien établie et qu'elle ne fait pas l'objet de la démonstration en cours (par opposition aux égalités notées " $=$ ").
  Nous utiliserons le symbole " $:=$ " dans un souci de concision ou de clarification ; nous n'en ferons pas un usage systématique.

- Nous utiliserons le symbole " $\propto$ " pour signifier **"équivalent à..."** ou **"varie comme..."** ou encore **"proportionnel à..."**.
  Considérons par exemple la fonction $F = x^n(1 + \varepsilon(x))$ où $\varepsilon(x)$ décroît vers 0 lorsque x tend vers ∞. Dans ces condition nous poserons $F \propto x^n$ (on dit "F équivalent à x^n"). Cela ne signifie pas que $F - x^n \to 0$. Pour $n = 2$ et $\varepsilon(x) = 1/x$ il vient $F = x^2 + x$ et par conséquent $F - x^2 = x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, cependant, dans ces conditions $F \propto x^2$.
  Une grandeur physique P, s'exprime en fonction des variables ρ, T, etc. On écrit $P = F(\rho, T, ...)$. Supposons que l'on ait $P = \rho^\gamma f(T, ..)$ où f est indépendant de ρ. On écrira $P \propto \rho^\gamma$ (on dit "P varie comme ρ^γ"). Bien que le symbole "$\propto$" puisse prendre des sens différents, aucune ambiguïté n'est à redouter dans un contexte donné.

- Très souvent, nous ne sommes pas intéressés par la valeur précise d'une quantité physique mais par son "**ordre de grandeur**".
  Ainsi le rayon terrestre, $R_\oplus$ est de l'ordre de 10 000 km (plus précisément 6 400 km). Nous écrirons $R_\oplus \sim 10\,000$ km. Remarquer que le diamètre terrestre est du même ordre. Une goutte d'eau dont le diamètre est $d \sim 1$ mm est 10 ordres de grandeur plus petite que la Terre ((1 mm)/(10 000 km) $= 10^{-10}$).
  Nous distinguerons les relations " $\simeq$ " (à peu près égale à) et " $\sim$ " (de l'ordre de) : par exemple $1254 \simeq 1,3\,10^3 \sim 10^3$.

– Les symboles " $\gtrsim$ " et " $\lesssim$ " seront employés pour signifier respectivement "**supérieur à un terme de l'ordre de...**" et "**inférieur à un terme de l'ordre de...**" tandis que " $>>$ " et " $<<$ " signifient "**beaucoup plus grand que...**" et "**beaucoup plus petit que...**".

Seules des grandeurs de même nature peuvent être comparées entre elles : une longueur avec une autre longueur, une durée avec une autre durée et **jamais** une durée avec une longueur. Les grandeurs de même nature ont mêmes unités.

Chapitre 1

LES VECTEURS

Le but de ce chapitre est de rappeler et de compléter les notions introduites au lycée. Ainsi nous reverrons les bases de la théorie des vecteurs : égalité, dépendance linéaire, orthogonalité, norme, projection, etc. Il peut être utile de lire les rappels sur les bases de la trigonométrie (notamment la définition du cercle trigonométrique, des sinus et cosinus) avant de commencer ce chapitre.

1.1 Définition

Soient deux points de l'espace A et B. On peut leur associer un **"vecteur"** $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur est défini par la donnée de trois éléments :

- une **direction :** celle de la droite AB
- un **sens** : de A vers B
- une **norme** ou module ou intensité $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$: égale à la longueur du segment $[AB]$. Cette norme est un nombre réel positif.

Ces trois éléments ne dépendent pas directement des points A et B : on peut imaginer des vecteurs de même norme, de même direction et de même sens dont la représentation dans l'espace n'a rien en commun avec ces deux points. Cependant, comme la définition d'un vecteur ne dépend que de ses norme, direction et sens, on en déduit que tous ces vecteurs sont égaux. Dans le cas général, deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, sens et norme.

Le **"vecteur nul"**, noté $\overrightarrow{0}$, est un vecteur de norme nulle. Il correspond à un vecteur $\overrightarrow{AA}$, avec A point quelconque de l'espace, on ne peut lui définir de direction ou de sens.

Deux vecteurs de sens opposés, mais de même norme et de même direction sont des **"vecteurs opposés"**. Ainsi, on a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un **"vecteur unitaire"** est un vecteur de norme égale à 1. Dans un repère orthonormé cartésien, les vecteurs de base, appelés $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ou $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$, sont unitaires et orthogonaux.

1.2 Repérage du plan et de l'espace : coordonnées

1.2.1 Notions d'orientation et de plan orienté (2D)

On oriente une droite en choisissant sur celle-ci un sens de parcours, c'est-à-dire un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. Tout vecteur issu de deux points choisis sur la droite est donc colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et sera dans le sens positif si le coefficient de proportionalité entre le vecteur et $\overrightarrow{u}$ est positif (voir paragraphe sur les vecteurs colinéaires). On peut définir deux vecteurs unitaires sur une droite (de sens différents), il y a donc deux orientations possibles sur une droite.

On oriente un plan en choisissant deux vecteurs unitaires orthogonaux $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. On est alors capable d'orienter un cercle de rayon unité dans le sens usuel de parcours positif, c'est-à-dire de $\overrightarrow{i}$ vers $\overrightarrow{j}$. De même, cette orientation est utilisable pour tout angle entre deux vecteurs de ce plan. Il y a deux orientations possibles des angles dans un plan ; on privilégie, en général, une orientation positive dans le sens anti-horaire (sens inverse des aiguilles d'une montre).

1.2.2 Repères en 2D : composantes d'un vecteur dans un plan

Soit O le point choisi comme origine d'un plan. L'ensemble $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ définis au paragraphe précédent, constitue un repère du plan à partir duquel il est possible de définir un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y).

Si l'on considère deux points du plan : A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), on a :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j} = \lambda\,\overrightarrow{i} + \mu\,\overrightarrow{j}$$

On dit alors que λ et μ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Cette combinaison linéaire entre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les vecteurs du repère $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ est unique. Ainsi, si l'on considère deux autres points du plan C et D, on aura $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(x_B - x_A) = (x_D - x_C)$ et $(y_B - y_A) = (y_D - y_C)$.

On peut remarquer que si $A = O$ alors $\overrightarrow{OB} = x_B\,\overrightarrow{i} + y_B\,\overrightarrow{j}$. De façon générale, pour tout vecteur $\overrightarrow{V} = \lambda\,\overrightarrow{i} + \mu\,\overrightarrow{j}$ du plan, il est possible de trouver un point M de coordonnées (x_M, y_M) tel que : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM}$

On a alors : $x_M = \lambda$ et $y_M = \mu$.

1.2.3 Coordonnées cartésiennes et polaires d'un vecteur du plan

Soit un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $\overrightarrow{V} = \lambda\,\overrightarrow{i} + \mu\,\overrightarrow{j}$ un vecteur du plan :

On peut alors définir le vecteur à partir de ses composantes :

- sa direction est celle d'une droite de pente $\dfrac{\mu}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$ et parallèle à Oy si $\lambda = 0$.
- son sens est donné par les signes de λ et de μ.
- sa norme est donnée en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\left\|\overrightarrow{V}\right\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

Par ailleurs, tout point M de coordonnées (x_M, y_M) du plan tel que $M \neq O$ peut être repéré dans le plan à partir des éléments définissant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (direction, sens, norme) par deux nombres réels r_M et θ_M :

- r_M est un réel positif égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $r_M = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$
- $\theta_M \in \,]-\pi, +\pi]$ est la mesure de l'angle entre la droite (OM) et la demi-droite des $x \geq 0$ de l'axe Ox, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On a alors : $x_M = r_M \cos\theta_M \qquad y_M = r_M \sin\theta_M$

Réciproquement : $r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \qquad \tan\theta_M = \dfrac{y_M}{x_M}$

1.2.4 Orientation d'un plan et d'un trièdre (3D)

Etant donné un plan P, on choisit un vecteur $\overrightarrow{u}$ orthogonal à ce plan. Deux choix sont possibles. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant choisi, on dispose alors **la main droite** comme il est indiqué sur la figure 1.1. L'orientation positive des angles du plan s'en déduit.

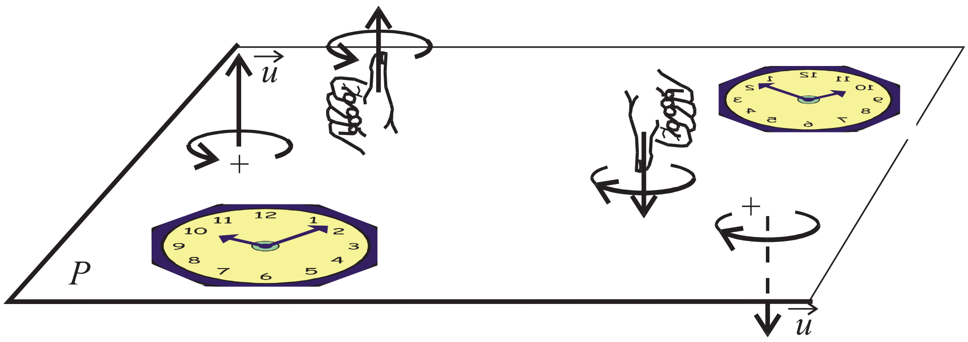

fig. 1.1 : Les deux orientations possibles d'un plan.

Considérons maintenant trois vecteurs non coplanaires, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ de même origine. Le plan formé par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ est orienté de telle sorte que le sinus de l'angle $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ soit positif. On en déduit le vecteur unitaire, $\vec{u}$, qui oriente le plan.

Si le vecteur $\vec{v}_3$ est dans le même demi espace que $\vec{u}$, le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est un **"trièdre direct"** dans le cas contraire le trièdre est **"rétrograde".**

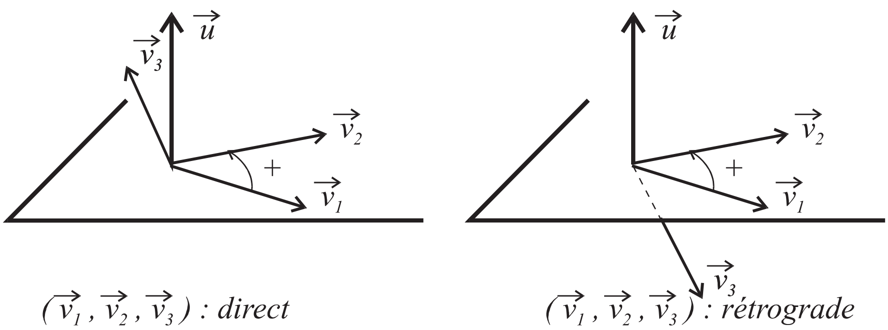

fig. 1.2 : Trièdres direct et rétrograde.

Attention ! L'ordre des vecteurs est important. Si le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est direct il en est de même de $(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$ mais $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2)$ est alors rétrograde ainsi que $(-\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, par exemple.

1.2.5 Repères en 3D

Pour repérer la position des points de l'espace, on se donne un trièdre orthonormé direct, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)^*$ et un point O, choisi comme origine. Le point M est repéré par les composantes (x, y, z) du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$. Les trois valeurs x, y et z sont les **"coordonnées cartésiennes"** du point M associées au repère donné (l'abscisse est x, l'ordonnée est y et la cote est z). De façon analogue au cas 2D, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont uniques et définissent entièrement ses caractéristiques.

*que l'on appelle souvent $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

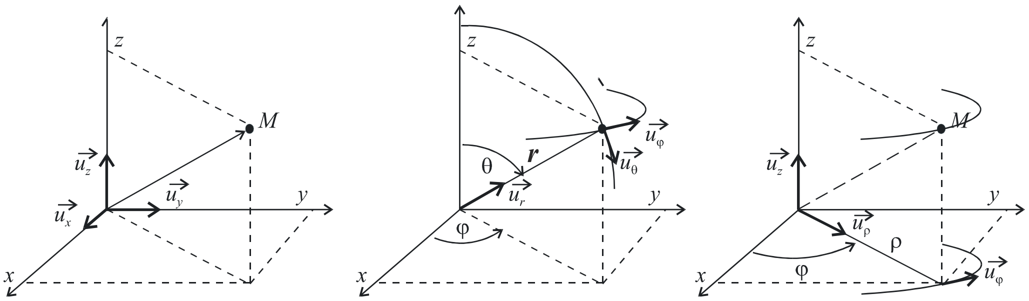

fig. 1.3 : Coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques.

Les **"coordonnées sphériques"** sont r, θ et φ.

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \ , \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \ , \quad z = r \cos\theta \quad \text{avec} \\ r &\geq 0 \ , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \ , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

M étant repéré par ses coordonnées sphériques, on définit le repère "local" $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ qui est un repère orthonormé direct (cf. fig. 1.3)

On utilise aussi les **"coordonnées cylindriques"** ρ, φ, z où le trièdre local $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\varphi, \overrightarrow{u}_z)$ est orthonormé direct :

$$x = \rho \cos\varphi \ , \quad y = \rho \sin\varphi$$

Remarquons que les vecteurs $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ de la représentation sphérique et les vecteurs $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\varphi)$ de la représentation cylindrique dépendent du point M considéré[†] tandis que les trois vecteurs de base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ de la représentation cartésienne ne dépendent pas du point, M.

Dans la suite du cours nous utiliserons essentiellement les coordonnées cartésiennes (d'un repère orthonormé direct).

1.3 Opérations sur les vecteurs

Les formules données dans cette section (en-dehors du produit vectoriel qui n'existe que dans l'espace) sont valables dans le plan aussi bien que dans l'espace. Les formules présentées en coordonnées cartésiennes le seront dans le cas de l'espace, c'est-à-dire avec trois composantes, mais il suffit de réduire ces formules à deux composantes (par exemple en ne considérant que ce qui dépend de x et y et en replaçant $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$ par $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$) pour trouver leurs équivalents dans le plan.

1.3.1 Addition vectorielle

L'addition vectorielle est une opération qui à deux vecteurs associe un troisième vecteur.

Soient $\overrightarrow{V} = X\,\overrightarrow{u}_x + Y\,\overrightarrow{u}_y + Z\,\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{V}\,' = X'\,\overrightarrow{u}_x + Y'\,\overrightarrow{u}_y + Z'\,\overrightarrow{u}_z$. La somme de ces deux vecteurs est notée $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V}\,'$; c'est, par définition, le vecteur $\overrightarrow{S}$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{S} := \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V}\,' = (X + X')\ \overrightarrow{u}_x + (Y + Y')\ \overrightarrow{u}_y + (Z + Z')\ \overrightarrow{u}_z}$$

[†] Pour cette raison les repères introduits en représentation sphérique et cylindrique ont été qualifiés de "locaux".

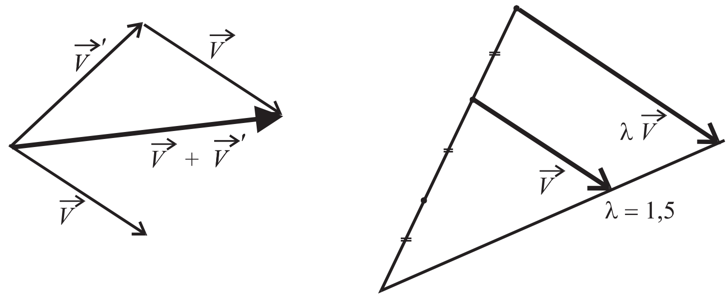

fig. 1.4

Attention ! Dans l'addition vectorielle, ce ne sont pas les normes (les longueurs) des vecteurs qui s'additionnent, mais les composantes suivant chaque axe. On a ainsi :

$\left\|\vec{V} + \vec{V}\,'\right\| \leq \left\|\vec{V}\right\| + \left\|\vec{V}\,'\right\|$

On a l'égalité si au moins un des vecteurs est nul ou si les vecteurs sont colinéaires (voir définition ci-après).

Les propriétés de l'addition vectorielle sont les suivantes :

– la commutativité : $\vec{V} + \vec{V}\,' = \vec{V}\,' + \vec{V}$
– l'associativité : $(\vec{V} + \vec{V}\,') + \vec{V}\,'' = \vec{V} + (\vec{V}\,' + \vec{V}\,'')$
– $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$
– $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$

1.3.2 Multiplication par un scalaire

Le nombre réel λ étant donné, on définit le produit d'un vecteur par λ, et on note ce produit $\lambda\,\vec{V}$:

$$\boxed{\lambda\,\vec{V} = \lambda \times \vec{V} = (\lambda X)\ \vec{u}_x + (\lambda Y)\ \vec{u}_y + (\lambda Z)\ \vec{u}_z}$$

La direction de $\lambda\,\vec{V}$ est celle de $\vec{V}$, son sens est le même que celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et est le sens contraire si $\lambda < 0$.

Sa norme est : $\left\|\lambda\,\vec{V}\right\| = |\lambda| \times \left\|\vec{V}\right\|$; en particulier, si λ est nul, $0 \times \vec{V} = \vec{0}$

Les propriétés de la multiplication par un scalaire sont (μ étant un nombre réel) :

– $\lambda \times (\mu \times \vec{V}) = (\lambda \times \mu) \times \vec{V}$
– $(\lambda + \mu) \times \vec{V} = \lambda \times \vec{V} + \mu \times \vec{V}$
– $1 \times \vec{V} = \vec{V}$
– $\lambda \times \vec{V} = \vec{0}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{V} = \vec{0}$
– $\lambda \times (\vec{V} + \vec{V}\,') = \lambda \times \vec{V} + \lambda \times \vec{V}\,'$

1.3.3 Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}\,'$ sont soit colinéaires, soit linéairement indépendants.

– Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}\,'$ sont dit "**colinéaires"** si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{V}\,' = \lambda \times \vec{V}$ (ce qui revient à dire qu'ils ont même direction).
– Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}\,'$ sont dit "**linéairement indépendants"** si et seulement $\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V}\,' = \vec{0}$ implique $\lambda = 0$ et $\lambda' = 0$

1.3.4 Produit scalaire de deux vecteurs

Etant donnés deux vecteurs, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ leur produit scalaire $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,'$ est **un nombre** tel que

$$\boxed{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,' = \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\,'\right\| \cos\theta}$$

où $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{V}\,'\right\|$ sont les normes des vecteurs et θ l'angle entre les deux vecteurs.

Introduisons $\overrightarrow{U}$, projection orthogonale de $\overrightarrow{V}$ sur la direction de $\overrightarrow{V}\,'$ et $\overrightarrow{U}\,'$, projection orthogonale de $\overrightarrow{V}\,'$ sur la direction de $\overrightarrow{V}$ (fig. 1.5). Il vient

$$\boxed{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,' = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\,' = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}\,'}$$

Le produit scalaire ne dépend pas de l'ordre des vecteurs : il ne dépend pas du signe de θ mais de celui de $\cos\theta$.

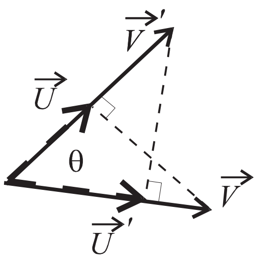

fig. 1.5 : $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,' > 0$.

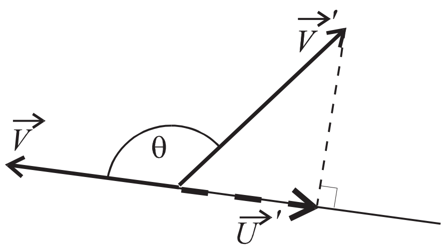

fig. 1.6 : $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,' < 0$

Le produit scalaire s'exprime en fonction des composantes de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ dans une base orthonormée sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}\,' = X\,X\,' + Y\,Y\,' + Z\,Z\,' = \overrightarrow{V}\,' \cdot \overrightarrow{V}}$$

Rappelons également la propriété suivante

$$\boxed{\overrightarrow{V} \cdot \left(\overrightarrow{V}_1 + a\,\overrightarrow{V}_2\right) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}_1 + a\,\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}_2}$$

où a est un nombre.

1.3.5 Produit vectoriel

Etant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$, le produit vectoriel de ces vecteurs est **un vecteur** $\overrightarrow{W}$ noté $\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}\,'$, défini de la façon suivante :

1. Si $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ sont parallèles, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{0}$.

2. Si $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ ne sont pas parallèles, ils définissent un plan P (cf. fig. 1.7). Nous choisissons un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ orthogonal à ce plan. Ce vecteur définit une orientation des angles dans P. Soit θ l'angle (orienté) $\left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}\,'\right)$. Par définition, on pose

$$\boxed{\overrightarrow{W} := \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}\,' = \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\,'\right\| \sin\theta \cdot \overrightarrow{u}}$$

Remarquons qu'à la limite $\theta \to 0$ on retrouve le cas 1. décrit ci-dessus.

Deux orientations sont possibles pour le vecteur $\vec{u}$. Si on change le signe de $\vec{u}$, on change l'orientation du plan P et donc le signe de θ. Le produit $\sin\theta \cdot \vec{u}$ reste inchangé ainsi que le produit vectoriel. La définition de $\vec{V} \wedge \vec{V}\,'$ ne dépend donc pas de la convention concernant l'orientation du plan P.

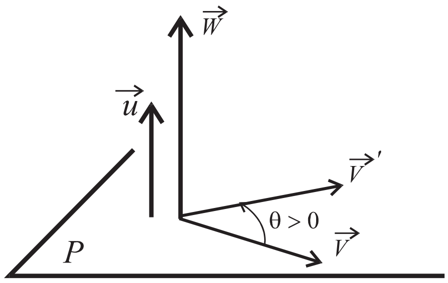

fig. 1.7 : $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}\,'$

On vérifie que **le trièdre** $\left(\vec{V}, \vec{V}\,', \vec{W}\right)$ **est direct**.

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

$\vec{V} \wedge \vec{V}\,' = -\vec{V}\,' \wedge \vec{V}$
$\vec{V} \wedge \left(\vec{V}_1 + a\,\vec{V}_2\right) = \vec{V} \wedge \vec{V}_1 + a\,\vec{V} \wedge \vec{V}_2$

où a est un nombre.

$$\boxed{\vec{V} \wedge \vec{V}\,' = (Y\,Z\,' - Z\,Y\,')\ \vec{u}_x + (Z\,X\,' - X\,Z\,')\ \vec{u}_y + (X\,Y\,' - Y\,X\,')\ \vec{u}_z}$$

La première propriété se démontre aisément. Si on change l'ordre $\vec{V}, \vec{V}\,'$ en $\vec{V}\,', \vec{V}$ on change θ en $-\theta$, ce qui change le signe du produit vectoriel.

Nous ne démontrerons pas la seconde propriété.

La troisième propriété se démontre en remarquant que le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct, ce qui implique

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z\ ,\quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x\ ,\quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

En développant le produit $(X\,\vec{u}_x + Y\,\vec{u}_y + Z\,\vec{u}_z) \wedge (X\,'\,\vec{u}_x + Y\,'\,\vec{u}_y + Z\,'\,\vec{u}_z)$ on obtient le résultat cherché.

1.3.6 Quelques remarques

• L'orthogonalité des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}\,'$ se traduit par la nullité de leur produit scalaire : $\vec{V} \cdot \vec{V}\,' = 0$.

En particulier, pour un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on a : $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0$

• La projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{V}$ sur un axe orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ s'écrit

$$\mathrm{Proj}_{/\overrightarrow{\mathrm{u}}}\left[\overrightarrow{V}\right]=\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{u}$$

La mesure algébrique de la projection orthogonale de $\overrightarrow{V}$ sur l'axe orienté par $\overrightarrow{u}$ est donc $\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{u}\right)$.

• La norme d'un vecteur peut être déterminée par un produit scalaire :

$$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{V}=\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$$

En particulier, on a : $\overrightarrow{u}_x\cdot\overrightarrow{u}_x=\overrightarrow{u}_y\cdot\overrightarrow{u}_y=\overrightarrow{u}_z\cdot\overrightarrow{u}_z=1$

• Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ sont proportionnels ($\overrightarrow{V}=a\,\overrightarrow{V}\,'$) on trouve $\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}\,'=\overrightarrow{0}$. Cette propriété permet de reconnaître le parallélisme de deux vecteurs.

• L'aire A du triangle construit sur $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V}\,'$ comme côtés s'exprime sous la forme $A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}\,'\right\|$.

• Le volume V, du tétraèdre construit sur $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V}\,'$ et $\overrightarrow{V}\,''$ comme côtés s'écrit $\mathsf{V}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{V}\cdot\left(\overrightarrow{V}\,'\wedge\overrightarrow{V}\,''\right)\right|$.

• Le nombre $\overrightarrow{V}\cdot\left(\overrightarrow{V}\,'\wedge\overrightarrow{V}\,''\right)$ est appelé "produit mixte" de $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V}\,'$ et $\overrightarrow{V}\,''$ pris dans cet ordre. Le produit mixte est positif si le trièdre $\left(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V}\,',\overrightarrow{V}\,''\right)$ est direct ; il est nul lorsque les vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires).

Chapitre 2
TRIGONOMÉTRIE

Ce chapitre consiste en une présentation des bases de la trigonométrie. Les formules habituelles sont notamment données, il convient de les connaître ou de savoir les retrouver rapidement (nous en reparlerons).

2.1 Le cercle trigonométrique

Le **"cercle trigonométrique"** est un cercle unitaire (de rayon 1) orienté suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre pour la mesure des angles. Pour mémoire, on rappelle que les angles sont exprimés dans diverses unités : degré, radian, etc. ($180° = \pi\ rad$). Ces unités n'ont pas de dimension. Il est commode d'exprimer les angles en radian car alors la valeur obtenue est la mesure de la corde du cercle trigonométrique correspondant à l'angle. S'il est en radian, l'angle devient une variable mathématique à part entière qui permet notamment de faire des développements limités que nous étudierons plus tard. Nous considérons donc pour la suite que tous les angles sont exprimés en radian.

La figure 2.1 résume les différentes définitions des fonctions trigonométriques de bases : sinus, cosinus, tangente, cotangente. La variation de chacune de ces fonctions est décrite dans le chapitre sur les fonctions.

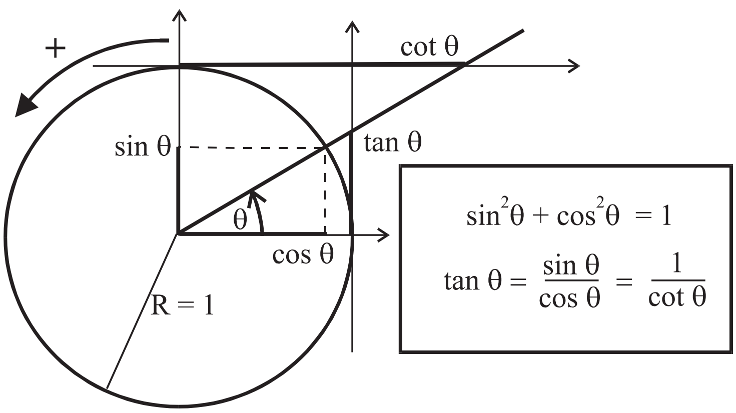

fig. 2.1 : Cercle trigonométrique.

2.2 Propriétés des sinus et cosinus

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des sinus et cosinus de quelques angles particuliers. Ces valeurs doivent être connues.

$\alpha =$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	en radian
$\sin\alpha =$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$	moyen mnémotechnique
$\sin\alpha =$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	
$\cos\alpha =$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	la ligne précédente de droite à gauche.

Ci-dessous sont données les relations entre différents angles, montrant des propriétés de symétrie des fonctions sinus et cosinus. Ces relations doivent être connues ou facilement retrouvées (en faisant un schéma avec un cercle trigonométrique par exemple).

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$	$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$	$\tan(\pi/2 + x) = -\cot x$
$\cot(\pi/2 - x) = \tan x$	$\cot(\pi/2 + x) = -\tan x$

2.3 Les relations trigonométriques dans un triangle

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment les fonctions trigonométriques peuvent intervenir dans les différentes sortes de coordonnées (en particulier cylindriques et sphériques) de vecteurs.

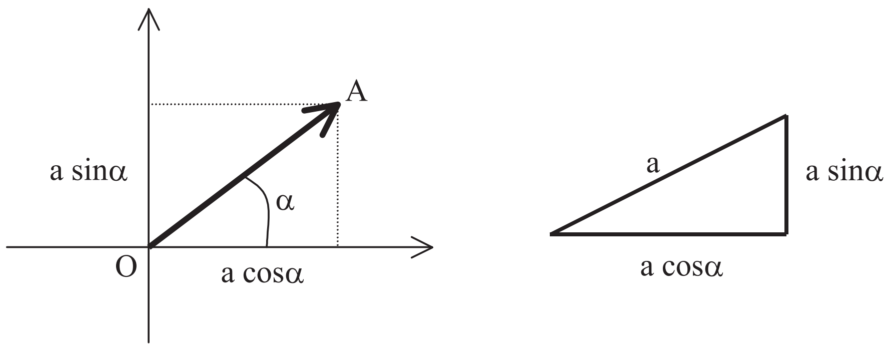

fig. 2.2 : Projection d'un vecteur et relations dans un triangle

Dans la figure 2.2, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour module $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| =$ a. Ses coordonnées cylindriques sont (a cosα, a sinα). Ces coordonnées cylindriques correspondent à la projection orthogonale de $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$ sur les axes Ox et Oy. Ainsi, comme cela est suggéré dans la figure 2.2, nous avons construit un triangle rectangle ayant trois côtés de longueur : a, a cosα, a sinα. Cette figure nous permet de retrouver certaines formules concernant les fonctions trigonométriques.

$$\text{cosinus d'un angle} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$
$$\text{sinus d'un angle} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$$
$$\text{tangente d'un angle} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Le théorème de Pythagore nous dit que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des côtés d'un triangle rectangle, c'est équivalent à

$$a^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha \Longleftrightarrow \boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

2.4 Relations entre fonctions trigonométriques d'angles différents

Ces relations se déduisent les unes des autres. Nous partirons d'une relation que nous démontrerons. Puis, la méthode pour trouver les autres formules sera ensuite indiquée succinctement.

La première relation que nous regardons peut être démontrée de diverses façons, mais la plus directe consiste en l'utilisation de la formule du produit scalaire décrite au chapitre précédent.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ formant un angle a et b avec l'axe Ox (figure 2.3).

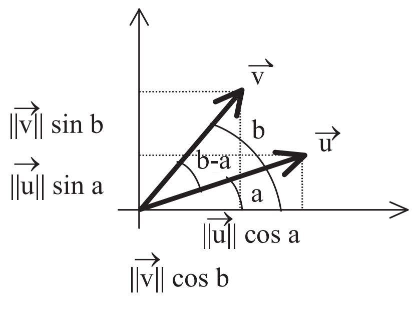

fig 2.3

Il est possible d'écrire leur produit scalaire de deux façons

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(b-a) = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(a-b)$$
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}}\times x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}}\times y_{\overrightarrow{v}} = \|\overrightarrow{u}\|\times\cos a\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos b + \|\overrightarrow{u}\|\times\sin a\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin b$$

Ces deux calculs sont égaux, ce qui nous donne

$$\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(a-b) = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos a\times\cos b + \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\sin a\times\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\times\cos b + \sin a\times\sin b$$

Les autres relations du tableau se déduisent en remplaçant b par $-b$ ou par a, puis en se servant de la formule

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Les relations sur la tangente découlent de sa définition.

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$	$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Les relations suivantes sont des combinaisons linéaires des précédentes.
Posons $\tan(x/2) := t$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\Big)$
$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$
$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2} \cdot \sin\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2} \cdot \cos\dfrac{p+q}{2}$

Faut-il appendre par coeur ces formules ? Ceux qui ont une excellente mémoire les retiendront sans peine, d'autres qui calculent rapidement retiendront seulement certaines de ces formules, ils en déduiront les autres si c'est nécessaire. Un étudiant qui "voit" le cercle trigonométrique les yeux fermés ne retiendra pas par coeur la valeur des cosinus et sinus des angles remarquables, ni même certaines relations comme $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ car un coup d'oeil sur son cercle trigonométrique lui donnera la réponse. Ainsi, chacun doit décider ce qu'il souhaite mémoriser en fonction de ses propres préférences.

Chapitre 3

LES FONCTIONS

3.1 Définitions

Soient E et F deux sous-ensembles de l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$. Une fonction de E à valeur dans F est une correspondance qui à tout nombre réel, x, de E associe un nombre réel, $f(x)$, de F.

De telles fonctions sont des **"fonctions réelles d'une variable réelle"**, les seules que nous considérons ici

$$x \longmapsto f(x) = y$$

On dit alors que y est fonction de x.

E est l'ensemble de définition tandis que F est l'ensemble des valeurs.

Lorsqu'une valeur $y \in F$ est l'image d'une seule variable, x de E, la correspondance entre x et y établie par la fonction f est dite **"biunivoque"**. Dans ce cas on définit la fonction, h, inverse de f :

$$y \mapsto h(y) = x \text{ telle que } f(x) = y$$

Les fonctions f et h sont des **"fonctions inverses"** l'une de l'autre.

Le plan étant rapporté à 2 axes $\{Ox, Oy\}$ on considère le point M de coordonnées $(x,\ y = f(x))$. L'ensemble des points M constitue **"le graphe"** de f.

Par exemple l'aire, A, d'un carré de côté x est $A = x^2 := f(x)$. Par nature, x est positif ; cependant l'intervalle de définition de la fonction mathématique $x \mapsto y = x^2$ est l'ensemble des réels ; son graphe est une parabole.

Lorsque x tend vers a par valeurs inférieures $(0 < (a - x) \to 0)$, la fonction $f(x)$ admet la limite $f(a_-)$. Similairement on note $f(a_+)$ la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a par valeur supérieures $(0 < (x - a) \to 0)$.

Si les deux limites de la fonction $f(x)$ en $x = a$ sont finies et sont toutes deux égales à la valeur de la fonction en ce point, on dit que la fonction $f(x)$ est **"continue"** en a.

On peut remarquer que si la fonction n'est pas définie au point a, mais que les deux limites en $x = a$ sont finies et égales, il est possible de définir une fonction $g(x)$ telle que : $\forall x \neq a \quad g(x) = f(x) \quad$ et $\quad g(a) = f(a_-) = f(a_+)$. La nouvelle fonction $g(x)$ obtenue est appelée **"prolongement par continuité"** de la fonction $f(x)$; elle est continue en a.

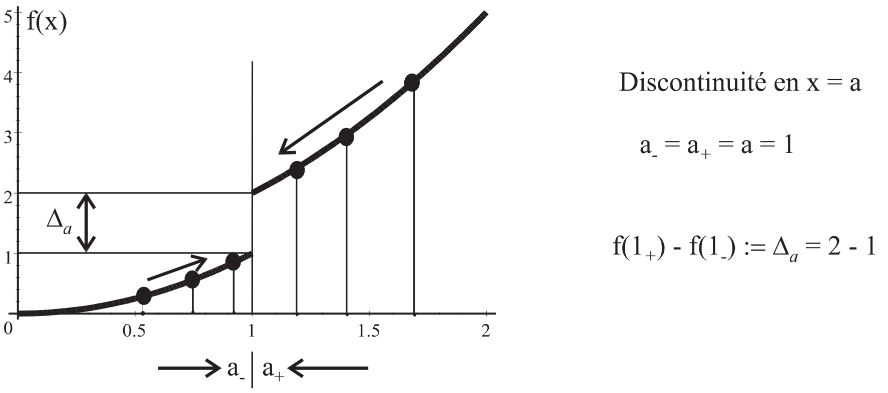

fig. 3.1 : Discontinuité en $x = a$; $\Delta_a = 2 - 1 = 1$.

Si la fonction f présente une discontinuité en $x = a$, les limites de $f(x)$ ne sont pas les mêmes dans les deux cas : $f(a_-) \neq f(a_+)$ (cf. fig. 3.1). La **"discontinuité"** en a est la différence $f(a_+) - f(a_-) := \Delta_a$.

Reprenons l'exemple précédent pour avoir une approche plus "physique" de la continuité d'une fonction.

Pour calculer numériquement l'aire du carré de côté a, nous remplaçons a par une grandeur mesurée, entachée d'une erreur inconnue. Par définition ***l'erreur absolue*** sur une grandeur G est la différence entre l'estimation $\widetilde{G}$ de G et sa valeur

$$\text{erreur } = \widetilde{G} - G := e$$

On utilise aussi la même dénomination "erreur absolue" pour désigner $\left|\widetilde{G} - G\right|$.

Une mesure du côté nous donne une estimation de a. Soient $x_1, x_2, ...x_n$,... les estimations de a obtenues par des mesures successives de plus en plus précises. Cela signifie que les erreurs sont de plus en plus petites : $|x_n - a| < ... < |x_2 - a| < |x_1 - a|$. Lorsque l'erreur est arbitrairement petite (pour n assez grand) on dit que "x tend vers a" (on écrit $x \to a$ ou encore $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$). Les estimations correspondantes de A sont $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ L'erreur sur A devient arbitrairement petite lorsque x_n tend vers a. Une telle propriété caractérise les fonctions, f, continues.

Imaginons un instant que ce ne soit pas le cas. Les conséquences en seraient surprenantes ; en effet il ne servirait plus à rien d'améliorer la précision sur a car cela n'améliorerait pas notre connaissance de A. Comme aucune mesure ne peut donner la valeur exacte de a, jamais nous ne pourrions disposer d'une approximation de A.

Cette propriété qui nous permet d'obtenir une bonne estimation de $f(x)$ si nous disposons d'une bonne estimation de la variable x, reflète la continuité de la fonction f.

3.2 Limites

Après avoir introduit intuitivement la notion de limite, nous en donnons ici une définition plus précise.

Supposons que $|f(x) - \ell|$ est arbitrairement petit si on choisit $|x - a|$ assez petit, ou encore que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut si l'on choisit x assez proche de a. On résume cette propriété en disant "$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a" et on écrit "$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$", ou encore "$f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$".

N.B. Lorsque $\lim f$ est supérieure (resp. inférieure) à tout nombre, on écrit

$$\lim f = +\infty \text{ ou } f \to +\infty \quad (\text{resp. } \lim f = -\infty \text{ ou } f \to -\infty).$$

Rappelons quelques résultats utiles. $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions continues λ est une constante quelconque, α une constante positive et n un entier positif.

$\lim\limits_{x\to a}[u(x)+\lambda\, v(x)] = \lim\limits_{x\to a}[u(x)] + \lambda \lim\limits_{x\to a}[\, v(x)]$	$\lim\limits_{x\to a}\left[u(v_{(x)})\right] = u\left(v_{(a)}\right)$
$\lim\limits_{x\to a}[u\cdot v] = \lim\limits_{x\to a}[u]\cdot\lim\limits_{x\to a}[v]$	$\lim\limits_{x\to a}[u\,/\,v] = \lim\limits_{x\to a}[u]\;/\;\lim\limits_{x\to a}[v]$

$\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\alpha} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{-\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0_-} x^{n} = (-1)^n \times 0_+$ $\lim\limits_{x\to 0_-} x^{-n} = (-1)^n \times \infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-\alpha} = 0_+$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^{n} = (-1)^n \times \infty$

$\lim\limits_{x\to 0_+}[\ln x] = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}[\ln x] = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty}[e^x] = 0_+,\ \lim\limits_{x\to +\infty}[e^x] = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0_+}[x^{\alpha}\,\ln x] = 0 = \lim\limits_{x\to 0_+}[x^{\alpha}]$ $\lim\limits_{x\to +\infty}[x^{-\alpha}\,\ln x] = 0 = \lim\limits_{x\to +\infty}[x^{-\alpha}]$	$\lim\limits_{x\to -\infty}[\lvert x\rvert^{\alpha}\; e^x] = 0 = \lim\limits_{x\to -\infty}[e^x]$ $\lim\limits_{x\to +\infty}[x^{-\alpha}\, e^x] = \infty = \lim\limits_{x\to +\infty}[e^x]$

On remarquera le rôle prédominant des exponentielles devant leur logarithme pour l'obtention des 4 limites précédentes.

3.3 Dérivées

3.3.1 Généralités

Soit la fonction f et le point $A(a, f(a))$ de son graphe. Soit M un point voisin de A sur le graphe de f, de coordonnées $(a+\Delta x, f(a)+\Delta y)$ (cf. fig 3.2) On définit la **"dérivée de f au point a" :**

$$f\,'(a) := \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) := \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right)$$

Il peut arriver cependant que la limite n'existe pas ; la fonction n'est alors pas dérivable en $x = a$.

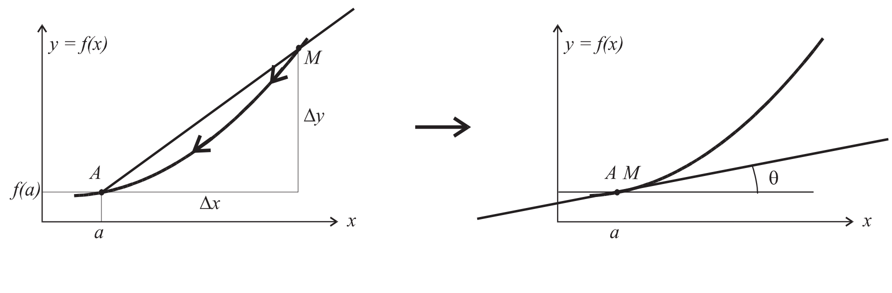

fig. 3.2 : $f\,'(a) := \left(\frac{d}{dx}f\right)_a = \tan\theta.$

Lorsque la dérivée est positive la fonction est **"croissante"** ($\tan\theta > 0$) ; dans le cas contraire ($\tan\theta < 0$) la fonction est **"décroissante"**.

Dans le cas général, nous définissons **"la dérivée à gauche"** et **"la dérivée à droite"** de la fonction f au point a :

$$\begin{aligned} \text{dérivée à gauche} \quad &: \quad f'(a_-) = \lim_{\Delta x \to 0_-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \\ \text{dérivée à droite} \quad &: \quad f'(a_+) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

Ces deux quantités peuvent être différentes. La fonction f' est alors discontinue en $x = a$. Si, dans ce cas, la fonction f est continue en a, le point de son graphe est appelé **"point anguleux"**.

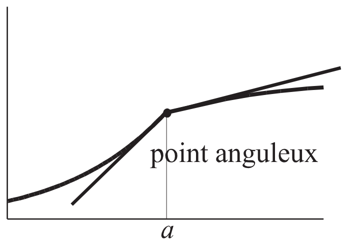

fig. 3.3 : $f'(a_-) \neq f'(a_+)$

Supposons que f soit dérivable en tous points. On définit alors la **"fonction dérivée" :** $x \mapsto f'(x)$.

On peut noter que les fonctions f et f' que nous rencontrons sont le plus souvent continues, il convient toutefois de garder en mémoire que ce n'est pas le cas de toutes les fonctions.

Il est plus commode d'utiliser les notations suivantes, qui ont le bon goût d'être d'utilisation plus générale (notamment pour les fonctions à plusieurs variables) :

$$\begin{aligned} f'(a) \quad &: \quad = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_a := \left(\frac{df}{dx}\right)_a := \left(\frac{df}{dx}\right)(a) \\ f'(x) \quad &: \quad = \frac{df(x)}{dx} := \frac{d}{dx}f(x) := \left(\frac{df}{dx}\right)_x := \left(\frac{df}{dx}\right)(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ces notations trouveront leur justification plus loin lors de l'étude des différentielles.

La fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$ peut elle même être dérivée. On obtient ainsi la **"dérivée seconde"** :

$$f''(x) := \frac{df'(x)}{dx} := \frac{d^2 f(x)}{dx^2} := \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_x := \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)(x)$$

On obtient, par dérivation successive, les **"dérivées d'ordre n"** :

$$f^{\overbrace{\prime \cdots \prime}^{n}} := \frac{d^n f(x)}{dx^n} := \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_x$$

Attention à la position de " n " : on note " $d^n f$ " et " dx^n ". De plus, aucune fantaisie n'est admise pour le " d " car les symboles ∂ ou D ou δ ont d'autres significations précises, dont certaines seront présentées ultérieurement.

L'allure du graphe de f au voisinage d'un point dépend des propriétés des dérivées de f en ce point. Les figures ci-dessous (3.4 et 3.5) rappellent divers cas.

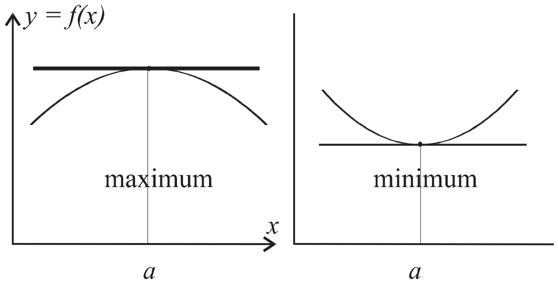

fig. 3.4 : $\left(\frac{d}{dx} f\right)_a = 0.$

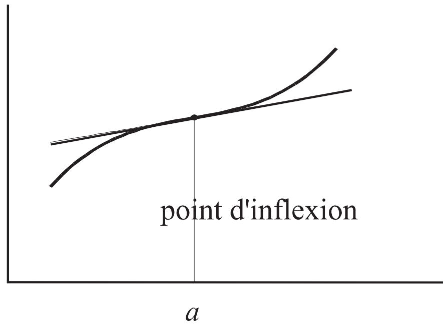

fig. 3.5 : $\left(\frac{d^2}{dx^2} f\right)_a = 0, \ \left(\frac{d^3}{dx^3} f\right)_a \neq 0.$

Dans les cas représentés sur la figure 3.4 on dit que la fonction f présente ***un extremum*** pour la valeur $x = a$.

3.3.2 Calcul de dérivées.

Rappelons sans démonstration les principales formules concernant le calcul de dérivées. Ces expressions se rencontrent souvent et **il convient de les mémoriser**.

La variable est ici x et nous posons $\frac{d}{dx}(\ ) := (\ )'$.

n et a sont des constantes ; $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions de x.

$y =$	a	ax	x^n	$\frac{1}{x} := x^{-1}$	$\sqrt{x} := x^{1/2}$
$y' =$	0	a	$n\,x^{n-1}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y =$	e^{ax}	$\ln(ax)$
$y' =$	ae^{ax}	$\frac{1}{x}$

$y =$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot\, x = \frac{1}{\tan x}$
$y' =$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

$y =$	$a\,u + v$	$u \cdot v$	$\frac{u}{v}$	$f\,[u(x)]$	u^n
$y' =$	$a\,u' + v'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	$\frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	$u' \cdot \left(\frac{df(u)}{du}\right)_{u(x)}$	$n\,u'\,u^{n-1}$

Il faut toujours prendre garde à la variable par rapport à laquelle s'effectue la dérivation. Par exemple cherchons $\dfrac{d}{dt}(\cos\omega t)$. Posons $u(t) = \omega t$ et $f(u) = \cos u$. Nous voulons calculer $\dfrac{df}{dt}$; dans ce cas $u' = \omega$ et $\dfrac{df}{du} = -\sin u$.
On trouve donc $\dfrac{df}{dt} = u\,' \cdot \dfrac{df}{du} = \omega \cdot (-\sin u) = -\omega \cdot \sin\omega t$.

Pour ce dernier exemple, nous pouvons remarquer que : $u\,' = \dfrac{du(t)}{dt} = \dfrac{du}{dt}$; ce qui revient à dire que : $\dfrac{df}{dt} = u\,' \cdot \dfrac{df}{du} = \dfrac{du}{dt} \cdot \dfrac{df}{du}$. Nous mettons ainsi en avant une des propriétés de cette notation : $\dfrac{df}{dt}$ est un rapport entre deux différentielles.

3.4 Etude d'une fonction

3.4.1 Propriétés remarquables.

Certaines fonctions présentent des propriétés remarquables que nous rappelons sur les figures suivantes (3.6 et 3.7).

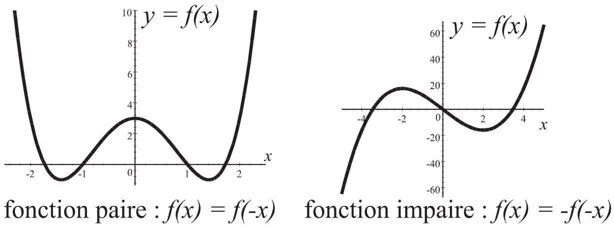

fig. 3.6 : Parité.

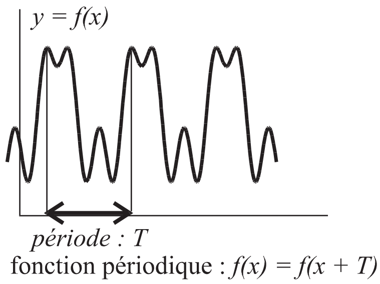

fig. 3.7 : Périodicité.

Parmi les fonctions trigonométriques par exemple, les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont toutes deux périodiques de période 2π. La fonction "cos" est en outre paire tandis que la fonction "sin" est impaire. La fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire et périodique de période π.

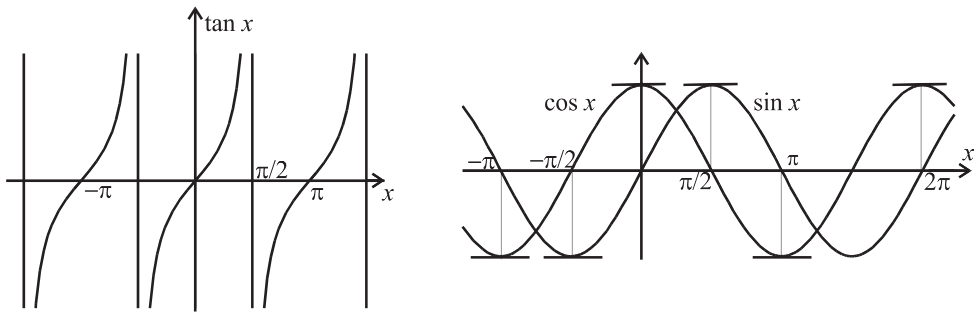

fig. 3.8 : Fonctions trigonométriques : "tangente", "cosinus", "sinus".

Certaines fonctions présentent en outre des comportements remarquables. Parmi ces fonctions, on distingue celles qui possèdent des asymptotes.

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} |f| = \infty$ la fonction f présente une **"asymptote verticale"** en $x = a$. C'est le cas de la fonction $x \mapsto \tan x$ en $x = \pi/2$ (cf. figure 3.8).

Lorsque $f(x) - (ax + b) := g(x)$ devient arbitrairement petit pour $x \mapsto \pm\infty$, on peut pratiquement remplacer (pour x assez grand) la fonction f par la fonction $ax + b$. Le graphe de f est alors pratiquement celui d'une droite : cette droite est une **"asymptote oblique"**. Lorsque $a = 0$, l'asymptote est une **"asymptote horizontale".**

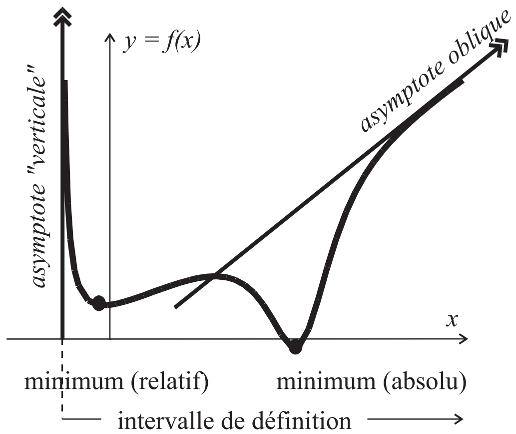

fig. 3.9

3.4.2 Etude d'une fonction.

On peut utiliser les moyens de l'informatique pour étudier une fonction et tracer son graphe, tout particulièrement si on recherche une bonne précision numérique. Mais ces moyens doivent rester sous le contrôle et la critique de l'utilisateur.

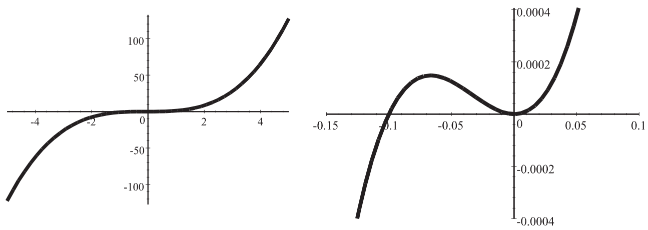

fig. 3.10 : $x \mapsto x^3 + x^2/10$.

Nous avons utilisé un logiciel spécialisé dans les problèmes de mathématiques pour tracer le graphe de la fonction $x \mapsto x^3 + x^2/10$. Nous avons obtenu la première courbe de la figure 3.10 qui est fournie par défaut.

Parce que nous connaissons l'allure du graphe, nous avons étudié à grande échelle la région $x \in [-0.15,\ 0.1]$. Deux extrema sont apparus, insoupçonnables sur la première courbe. Toujours parce que nous connaissons l'allure du graphe, nous savons qu'aucune surprise n'est attendue dans les autres régions.

Cet exemple très simple montre que les outils informatiques, même les plus efficaces, ne permettent pas de faire l'économie des méthodes d'étude des fonctions.

Intervalle de définition. Etant donnée une fonction à étudier, le premier point à éclaircir est son intervalle de définition. Il faut retenir que $\sqrt{u(x)}$ n'est défini que pour $u(x) \geq 0$ et que $1/u(x)$ n'est pas défini pour $u(x) = 0$.

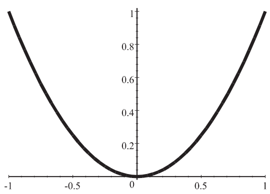

fig. 3.11 : $y = x^2$.

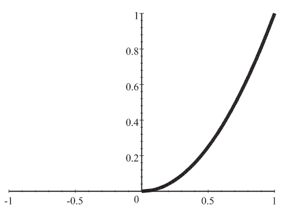

fig. 3.12 : $y = \left(\sqrt{x}\right)^4$.

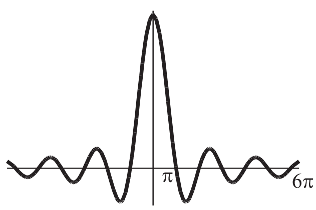

fig. 3.13 : $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

La fonction $y = x^2$ est définie pour tout x ; par contre $\left(\sqrt{x}\right)^4$ n'est pas défini pour $x < 0$ tandis que sa valeur est celle de x^2 pour $x \geq 0$. Ces propriétés expliquent les graphes des deux premières fonctions.

Quant à la fonction $(\sin x)/x$, elle n'est pas définie pour $x = 0$, cependant $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = 1$. Pour cette raison, aucune "pathologie" n'apparaît en $x = 0$. On définit la fonction $\operatorname{sinc} x$ par les relations $\operatorname{sinc} x := (\sin x)/x$ pour $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc} 0 = 1$. Ainsi la fonction $\operatorname{sinc} x$ est elle définie et continue pour tout x.

Intervalle d'étude. Il est parfois possible de limiter l'étude d'une fonction à un intervalle plus petit que l'intervalle de définition. Si la fonction est paire, ou impaire, il suffit de l'étudier dans l'intervalle $[0,\ \infty[$ et d'utiliser les propriétés de symétrie (cf. fig 3.6). Si la fonction est périodique il suffit de l'étudier dans un intervalle d'amplitude égale à la période T.

Exemple. $f(x) = 1 + \tan^2(\pi x)$. Cette fonction est périodique de période $T = 1$. Elle est paire, il suffit donc de l'étudier dans l'intervalle $[0,\ 1/2]$. Par parité nous connaîtrons son graphe dans l'intervalle $[-1/2,\ 1/2]$ et grâce à sa périodicité nous obtiendrons le graphe dans l'intervalle $(-\infty,\ +\infty)$.

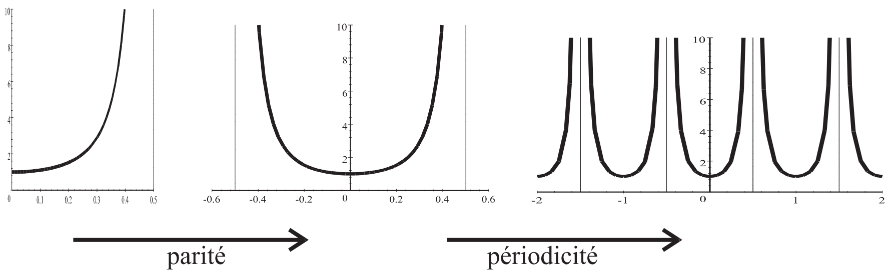

fig. 3.14 : L'intervalle d'étude de $x \mapsto 1 + \tan^2(\pi x)$ est $[0,\ 1/2]$.

Etude aux limites de l'intervalle d'étude.

Premier exemple. Dans l'exemple précédent, la fonction est définie et vaut 1 en $x = 0$. Elle n'est pas définie en $x = 1/2$ mais elle tend vers $+\infty$ quand $x \to 1/2$: asymptote verticale.

Deuxième exemple. La fonction $f(x) := \left(2x^2 + 1\right) / \left(x^2 + 5\right)$ est définie dans tout $\mathbb{R}$. Elle est paire, l'intervalle d'étude est donc $[0,\ +\infty[$. Le calcul direct donne $f(0) = 1/5$. Lorsque $x \to \pm\infty$ on met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$f(x) := \frac{2x^2\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = 2\frac{\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi $(f(x) - 2) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On est donc en présence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

Troisième exemple. La fonction $f(x) = \left(2x^3 - x^2 + 4\right) / \left(x^2 + x + 1\right)$ est définie dans tout $\mathbb{R}$. Elle se traite de la même façon, en plusieurs étapes lorsque $x \to \pm\infty$.

$$1^{\text{ère}}\text{étape} \quad : \quad f(x) := \frac{2x^3\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \propto 2x$$

$$2^{\text{ère}}\text{étape} \quad : \quad f(x) - 2x = \frac{-3x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{-3x^2\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -3$$

Le symbole " $\propto$ " se lit "équivalent à". **Deux fonctions sont dites *équivalentes* lorsque leur rapport tend vers 1 dans les conditions considérées**. Les graphes ont alors même allure mais cela ne signifie pas que les fonctions sont voisines (par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x + 2$ sont deux fonctions équivalentes lorsque $x \to \infty$ mais $g(x) - f(x) = 2$ ne tend pas vers zéro).

Ici $f(x) - 2x \to -3$ ce qui implique $f(x) - (2x - 3) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Le graphe de f admet donc la droite $y = 2x - 3$ comme asymptote.

Quatrième exemple. La fonction $f(x) := \left(2x^3 + x\right) / (x+1)$ est définie pour tout $x \neq -1$. L'intervalle de définition est $]-\infty, -1[\; \cup \;]-1, +\infty[$.

Au voisinage de $x = -1$ il vient $f(x) \propto -3/(x+1)$. Lorsque $x \to (-1)_{(-)}$ la fonction $f(x) \to +\infty$. Lorsque $x \to (-1)_{(+)}$ la fonction $f(x) \to -\infty$. Le graphe présente donc une asymptote verticale.

Le graphe possède une branche parabolique lorsque $x \to \pm\infty$. En effet dans ces conditions

$$\begin{aligned} f(x) \quad &: \; = \frac{2x^3\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \propto 2x^2 \\ f(x) - 2x^2 &= \frac{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \propto -2x \\ f(x) - 2x^2 + 2x &= \frac{3x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 3 \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) - \left(2x^2 - 2x + 3\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Lorsque $|x|$ est assez grand, $f(x)$ se comporte comme la parabole $y = 2x^2 - 2x + 3$.

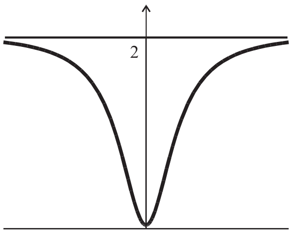

fig. 3.15 : $y = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$

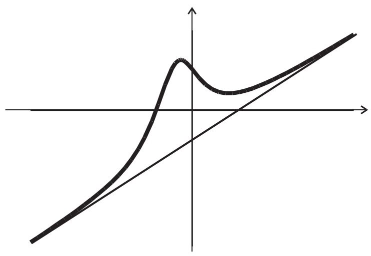

fig. 3.16 : $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$

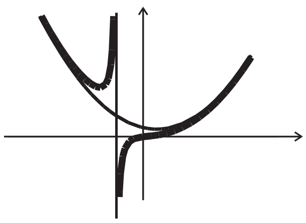

fig. 3.17 : $y = \dfrac{2x^3 + x}{x+1}$

Dans les exemples précédents les asymptotes sont les mêmes pour $x \to \pm\infty$. Il peut arriver qu'elles soient différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

La méthode précédente s'applique dans tous les cas, même si la fonction n'est pas le rapport de deux polynômes. Il faut savoir cependant que bien souvent il n'existe aucun comportement asymptotique simple.

Remarques diverses. Souvent il est possible de remarquer que $f(x)$ est positive dans telle région, qu'elle est monotone croissante, ou encore de déterminer aisément ses extrema ou ses intersections avec les axes.

Sens de variation. Enfin on complète l'étude précédente par l'étude du sens de variation de la fonction.

Rappelons les principaux résultats.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &> 0 \Rightarrow f(x) \nearrow \text{ (croissante)} \\ \frac{df}{dx} &< 0 \Rightarrow f(x) \searrow \text{ (décroissante)} \end{aligned}$$

Les extrema sont obtenus pour $df/dx = 0$.

Pour déterminer le comportement de la fonction, il faut donc étudier sa dérivée $df/dx := f'(x)$ et tout particulièrement le signe de sa dérivée. La fonction $f'(x)$ s'étudie comme une fonction....

3.4.3 Logarithmes et exponentielles

Ce paragraphe constitue un rappel sur les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes. Ces fonctions interviennent dans beaucoup de phénomènes naturels, notamment ceux où le taux de variation d'une grandeur $f(x)$ par rapport à une autre grandeur x (c'est-à-dire $\Delta f(x)/\Delta x$) est proportionnel à $f(x)$. Les exemples sont nombreux ; les cas les plus typiques sont la radioactivité, où le nombre d'atomes par unité de temps se désintégrant en un temps donné est proportionnel au nombre d'atomes contenu dans le matériaux à cet instant ou encore la culture bactérienne en phase de croissance où le nombre de nouvelles bactéries à un instant donné par unité de temps est proportionnel au nombre de bactéries présentes dans la culture à cet instant.

Propriétés La fonction logarithme est définie de $\mathbb{R}_+^*$ (ensemble des réels strictement positifs) vers $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Ces deux fonctions sont chacune fonction réciproque de l'autre, c'est-à-dire que leur composition donne l'identité : $\ln e^x = x = e^{\ln x}$

Les fonctions logarithmes et exponentielles vérifient les relations suivantes :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$
$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

Valeurs particulières : $e^0 = 1 \qquad \ln 1 = 0$

La fonction exponentielle est la seule fonction égale à sa dérivée : $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$. Il est donc naturel de la trouver dans la description de tout phénomène naturel où le taux de variation en un point est proportionnel à la valeur de la fonction en ce point. Comme l'exponentielle est strictement positive, sa dérivée l'est aussi et donc elle est croissante strictement sur $\mathbb{R}$.

Les graphes des fonctions logarithmes et exponentielles découlent de ces propriétés (fig. 3.18 et 3.19)

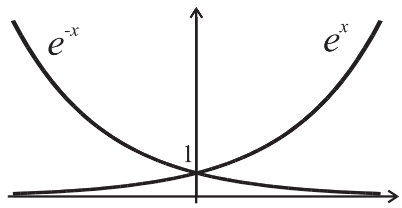

fig. 3.18 : Exponentielles.

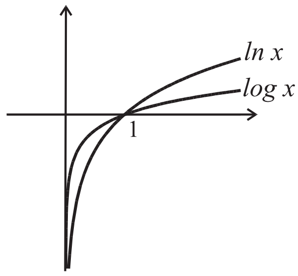

fig. 3.19 : Logarithmes.

Exponentielles et logarithmes de base différente de e La fonction "logarithme de base a", notée $\log_a$, est définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Ces fonctions portent le nom de logarithme car elles vérifient l'équation : $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$. De plus, $\log_a(a) = 1$.

Ce sont les fonctions réciproques des fonctions a^x.

– Le logarithme de base e (nombre d'Euler) est le logarithme népérien (dont la fonction réciproque est e^x). On le note $\ln(x)$ ou $Log(x)$. Le nombre e est tel que $\ln e = 1$ et $e = 2,7182818284590452353602874...$ e est un nombre irrationnel, la suite de ses décimales n'est pas périodique (comme π).
– Le logarithme de base 10 est le logarithme décimal. Sa fonction réciproque est 10^x. On le note $\log(x)$ ou $\log_{10}(x)$.
– Le logarithme de base 2, $\log_2(x)$, est le logarithme binaire, dont la fonction réciproque est 2^x.

3.4.4 Autres fonctions remarquables.

Outre les méthodes générales que nous avons rappelées, certaines fonctions doivent être bien connues. Ce sont

Les trois fonctions trigonométriques $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ (voir fig. 3.8 ci-dessus).

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

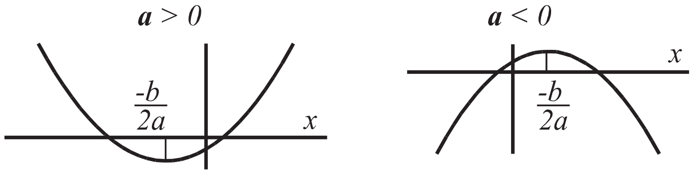

fig. 3.20 : $y = ax^2 + bx + c$

Remarquons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour racines l'abscisse des points d'intersection de la parabole avec l'axe des x.

L'absence de solution ($b^2 - 4ac < 0$) se traduit donc par l'absence de ces points.

L'hyperbole d'équation $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

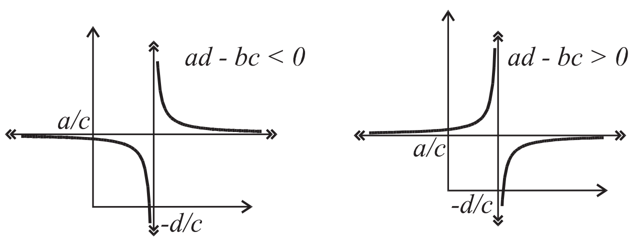

fig. 3.21 : $y = \dfrac{ac+b}{cx+d}$

Deux cas particuliers se rencontrent très souvent.

1. La fonction f est la somme, $f = g+h$, de deux fonctions, l'une, $g(x)$, croissante, l'autre, $h(x)$, décroissante et tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Dans les cas intéressants en physique, la fonction f admet souvent un minimum. Lorsque $x \to \infty$, les fonctions f et g deviennent arbitrairement voisines car $h \to 0$. Un exemple est donné fig. 3.22.

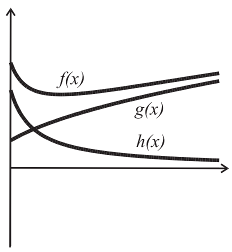

fig. 3.22

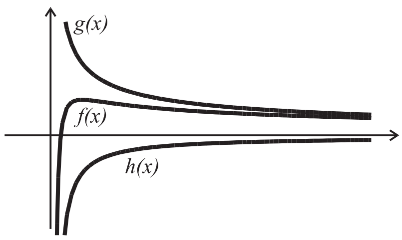

fig. 3.23

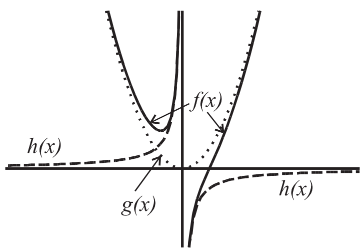

fig. 3.24

2. La fonction f est la somme de deux fonctions : $g(x) = ax^n$ et $h(x) = bx^m$ avec $n > m$.

Pour x voisin de l'origine on pose $f = bx^m\left(1 + (a/b)\,x^{n-m}\right)$. L'exposant $n - m$ étant positif il vient $x^{n-m} \to 0$ lorsque $x \to 0$. Dans ce cas $f \propto bx^m = h(x)$.

Pour $x \to \infty$ on pose $f = ax^n\left(1 + (b/a)\,x^{m-n}\right)$. L'exposant $m - n$ est négatif ; x^{m-n} devient négligeable lorsque $x \to \infty$. On trouve $f \propto ax^n = g(x)$.

La figure 3.23 représente le cas $g(x) = 3/\sqrt{x}$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = -1/2$ et $m = -1$).

La figure 3.24 représente le cas $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = 2$ et $m = -1$).

3.5 Développements limités

3.5.1 Développement de Taylor.

Considérons une fonction $f(x)$. Seules nous intéressent les valeurs de x voisines de $x = a$.

Par exemple nous voulons construire un thermomètre à mercure utilisable entre $T_1 = 263\,\mathrm{K}$ (soit $-10\,°\mathrm{C}$) et $T_2 = 323\,\mathrm{K}$ (soit $50\,°\mathrm{C}$). La hauteur h, de la colonne de mercure est une fonction de la température : $h = f(T)$. Nous voulons connaître cette fonction f au voisinage de $T_0 = 293\,\mathrm{K}$, dans l'intervalle $[293\,\mathrm{K} - 30\,\mathrm{K},\ 293\,\mathrm{K} + 30\,\mathrm{K}]$. Il n'est pas nécessaire de connaître exactement la fonction f car de toutes façons la mesure effectuée aura une précision limitée.

En général on pose $x := a + \delta x$ (soit $\delta x := x - a$). Une première approximation consiste à admettre $\widetilde{f}(a + \delta x) = f(a)$ où $\widetilde{f}$ est une estimation de f.

Lorsque la dérivée $f'(a)$, de la fonction f, est non nulle en $x = a$, une meilleure approximation consiste à remplacer le graphe de f par sa tangente en $x = a$ et à poser : $\widetilde{f}(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\,\delta x$.

En effet, par définition de la dérivée, il vient $f'(a) = \lim\limits_{\delta x \to 0}\left(\frac{f(a+\delta x)-f(a)}{\delta x}\right)$ ce qui signifie que $\frac{f(a+\delta x)-f(a)}{\delta x} - f'(a) = \varepsilon$ où ε devient négligeable lorsque $\delta x \to 0$. On en déduit la relation $f(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\,\delta x + \varepsilon\delta x$. Si δx est assez petit, ε devient négligeable devant $f'(a)$ et $\varepsilon\delta x$ peut être négligé devant $f'(a)\,\delta x$. Il vient $f(a+\delta x) \simeq f(a)+f'(a)\,\delta x$; ainsi on obtient l'estimation

$$\widetilde{f}(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\,\delta x.$$

Cette méthode se généralise. Nous n'en donnerons pas la démonstration mais seulement le résultat :

$$\boxed{\widetilde{f}(a + \delta x) = f(a) + \left(\frac{df}{dx}\right)_a \delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_a \delta x^2 + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_a \delta x^n} \tag{3.2}$$

où $n!$ est "factoriel n" : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$*.

Cette formule est la **"formule de Taylor"**. Elle permet de remplacer une fonction par un polynôme au voisinage d'une valeur quelconque de la variable. Le degré du polynôme est appelé **"ordre du développement"** (ci-dessus, c'est n) on dit aussi que 3.2 est le **"développement limité à l'ordre** n" de la fonction $f(x)$.

L'erreur commise est $e := \left|\widetilde{f}(a + \delta x) - f(a + \delta x)\right|$.

On démontre que $e \sim |H(x) \cdot \delta x^n|$ où H tend vers zéro lorsque δx tend vers zéro.

Bien entendu, un tel développement ne peut s'obtenir que pour des fonctions suffisamment régulières (dérivables jusqu'à l'ordre $n + 1$ pour un développement limité à l'ordre n).

Les développements que l'on rencontre le plus souvent sont limités au premier ou au deuxième ordre.

3.5.2 Cas des polynômes.

Pour les polynômes de degré n la formule de Taylor contient les termes d'ordre inférieur ou égal à n, tous les termes d'ordres supérieurs sont nuls.

Par exemple $f(x) := 2 + x + 3x^2$, au voisinage de $a = 0$.

$f(x) = 2 + x + 3x^2$	$\dfrac{df}{dx} = 1 + 6x$	$\dfrac{d^2 f}{dx^2} = 6$	$\dfrac{d^3 f}{dx^3} = 0$	etc.
$f(0) = 2$	$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_0 = 1$	$\left(\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 = 6$	$\left(\dfrac{d^3 f}{dx^3}\right)_0 = 0$	etc.

Le développement de Taylor s'écrit donc

$$f(x) = 2 + 1 \cdot \delta x + \frac{6}{2!}\delta x^2 + 0 + 0 + ...$$

Le polynôme $f(x)$ est du second degré ; les termes non nuls de son développement de Taylor sont d'ordre maximal 2. Les termes d'ordres supérieurs sont tous nuls.

*On pose en général $0! = 1$, ce qui permet de généraliser de nombreuses formules.

Avec, ici, $\delta x = x - a = x - 0 = x$ on constate que le développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre n, est rigoureusement égal à $f(x)$ pour $n \geq 2$. Ces propriétés restent valables pour une valeur quelconque de a.

Lorsque la fonction $f(x)$ n'est pas un polynôme, le développement se poursuit indéfiniment.

3.5.3 Développement de MacLaurin des fonctions usuelles.

Le développement de Taylor dans le cas $a = 0$ est appelé **"développement de McLaurin"**. Dans ce cas $\delta x = x - a = x - 0 = x$.

Donnons quelques exemples courants de développements de McLaurin (les expressions encadrées doivent êtres sues sans hésitation).

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + ... - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} + ...$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2} + ... - x^{2n+1} + x^{2n} + ...$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2} + ... + x^n + ...$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2}} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + ...$$

$$\boxed{\sin x = x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + ...$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} + ... - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + ...$$

$$\boxed{\tan x = x} + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + ...$$

Les expressions ci-dessus appellent plusieurs remarques.

1. Les fonctions paires ($\cos x$) ne contiennent que des puissances paires de x.

2. Les fonctions impaires ($\sin x$ et $\tan x$) ne contiennent que des puissances impaires de x.

3. Le développement de la dérivée d'une fonction est la dérivée du développement de cette fonction ; par exemple en dérivant le développement de $\ln(1 + x)$ on trouve le développement de $1/(1 + x)$ qui est la dérivée de $\ln(1 + x)$.

3.5.4 Validité du développement de McLaurin.

Dans les figures ci-dessous, nous représentons deux fonctions et, pour chacune, deux développements à des ordres différents.

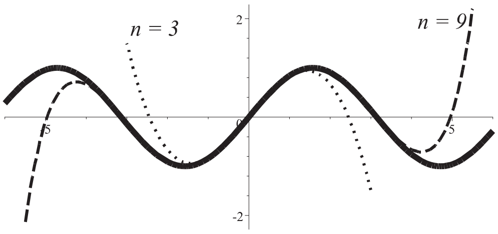

fig. 4.25 : $y = \sin x$.

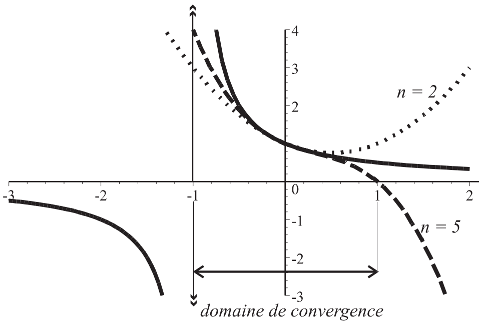

fig. 4.26 : $y = \dfrac{1}{x+1}$

En élevant l'ordre du développement on élargit son domaine de validité et on améliore la précision. Cependant pour la fonction $y = f(x) = 1/(1+x)$, aussi grand que soit n, le développement de Taylor ne constitue une approximation de $f(x)$ que dans le cas où $|x| < 1$. On dit que **"le rayon de convergence"** de la série de Taylor est 1.

3.5.5 Exemples.

Premier exemple. L'existence de développements de Taylor pour les fonctions les plus diverses explique pourquoi tant de lois physiques prennent des formes polynomiales (dans un domaine de validité généralement limité). Etudions un exemple.

On considère une règle à la température T_0. Sa longueur est ℓ_0. A la température T sa longueur est $\ell(T) := \ell_0 \cdot F(T)$, ce qui définit $F(T)$. Remarquons que $F(T_0) = 1$[†].

Une règle de longueur $L_0 = n\ell_0$ à la température T_0 peut être considérée comme n règles de longueur ℓ_0 mises bout à bout. Sa longueur à la température T sera donc $L = n\ell = n\ell_0 \cdot F(T) = L_0 \cdot F(T)$. Ainsi on obtient la loi $L = L_0 \cdot F(T)$ où $F(T)$ ne dépend pas de L_0.

Au voisinage de $T = T_0$ on donne de $F(T)$ un développement de Taylor, limité au premier ordre : $F(T) = F(T_0) + F'(T_0) \cdot \Delta T$ où $\Delta T := T - T_0$. Posons $F'(T_0) = \alpha$ et remplaçons $F(T_0)$ par sa valeur, $F(T_0) = 1$, il vient $F(T) = 1 + \alpha\,\Delta T$. On déduit la loi de dilatation linéaire : $\boxed{L = L_0\,(1 + \alpha\,\Delta T)}$ où α ne dépend que du matériau[‡] constitutif de la règle et non de sa longueur L_0.

Second exemple. Les développements de Taylor peuvent être utilisés pour le calcul d'une approximation. Soit à calculer par exemple $Z = 10/\sqrt{27}$. On écrit
$Z = 10/\sqrt{25+2} = 10/\sqrt{25(1+2/25)} = (10/5) \cdot \left(1/\sqrt{1+x}\right)$ avec $x = 2/25 = 0,08$.

Pour calculer $y = 1/\sqrt{1+x} = (1+x)^{-1/2}$ on peut considérer que la valeur $1+0,08$ est assez voisine de 1 pour que l'on puisse remplacer y par son développement: $y = (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\,x + ...$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. On peut aussi écrire $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + ...$, alors

[†]En effet $\ell_0 := \ell(T_0) = \ell_0 \cdot F(T_0)$ d'où $F(T_0) = 1$.

[‡]α est appelé "coefficient de dilatation linéaire" (ou linéïque).

$1/\sqrt{1+x} = 1/(1+X)$ avec $X = x/2 + ...$. On utilise la relation $1/(1+X) = 1 - X + ...$, il vient $1/\sqrt{1+x} = 1 - x/2 + ...$ Quelle que soit la façon de procéder, au premier ordre on trouve $1/\sqrt{1+0,08} \simeq 1 - 0,04$, ce qui donne $Z = 2 \cdot (1 - 0,04) = 1,92$. Un calcul plus précis donne 1,92450...

Troisième exemple. *Pesanteur à la surface terrestre.*

L'accélération gravitationnelle d'un objet proche de la Terre peut être déduite du principe fondamental de la dynamique et de l'expression de la force de gravitation

$$a(r) = \frac{GM}{r^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle ($G = 6{,}67\ 10^{-11}$ u.s.i.), M est la masse de la Terre ($M = 6\ 10^{24}$ kg) et r la distance de l'objet au centre de la Terre.

r est la variable du problème. On suppose que l'objet n'est pas dans le sous-sol terrestre, r est donc supérieur au rayon terrestre R ($R = 6400$ km).

Pour les objets usuels à la surface terrestre (homme, voiture, éléphant, pomme, ...) dont la taille est très faible par rapport au rayon terrestre, il est possible de se contenter d'une approximation de la fonction $a(r)$ à l'ordre zéro

$$a(r) \approx a(R) = g \approx 9,81 \text{ m/s}$$

Il s'agit de l'accélération de pesanteur habituelle.

Lorsque l'on se place au sommet d'une montagne (altitude h) à quelques kilomètres au-dessus de la surface, la variation de distance par rapport au centre de la Terre est encore très faible par rapport au rayon terrestre. Cependant, l'approximation à l'ordre zéro pour $a(r)$ devient insuffisante, car l'effet de l'altitude est mesurable dans beaucoup d'expériences. Il faut alors utiliser un développement limité au premier ordre

$$a(r) = g + \left(\frac{da}{dr}\right)_R h = g - 2\frac{GM}{R^3}h$$

3.6 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

3.6.1 Définition et notations.

Considérons la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = a$. Posons $x = a + \delta x$. Le développement 3.2, limité au premier ordre donne l'estimation

$$\widetilde{f}_1(x) = \widetilde{f}_1(a + \delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \delta x.$$

δx est **"la variation de la variable"** x (lorsqu'elle passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$\delta f := f(x) - f(a)$ est **"la variation de la fonction"** f (lorsque x passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$df := \widetilde{f}_1(x) - f(a) := f'(a) \cdot \delta x$ est, par définition, **" la différentielle de la fonction "** f en $x = a$. C'est une fonction de δx.

Remarquons que df **est de même dimension physique que** f.

Premier exemple. On pose $f = e^{x-1}$, $a = 1$, $x = 1 + \delta x$.

Il vient $f'(1) = 1$ soit $df := f'(1) \cdot \delta x = \delta x$ tandis que $\delta f = e^{x-1} - 1 = e^{\delta x} - 1$.

Pour $\delta x = 2$ on trouve $\delta f = e^2 - 1 = 6,3890... \simeq 6,4$ et $df = 2$. Pour cette valeur de δx la variation de f au voisinage de a et la différentielle de f sont très différentes. Par contre pour $\delta x = 0,1$ il vient $\delta f = e^{0,1} - 1 = 0,105...$ et $df = 0,1$ soit $\delta f \simeq df$. Ce n'est pas surprenant car **la différentielle df est une estimation de δf au premier ordre en** δx (développement de Taylor, valable lorsque δx est assez petit).

Deuxième exemple. Considérons la fonction particulière $f(x) = x$. Dans ce cas, de même que nous notons $dg = d\left(x^2\right)$ la différentielle de $g(x) := x^2$, nous posons $df = dx$. En outre, la définition de la différentielle ($df = f'(a) \cdot \delta x$) donne $df := 1 \cdot \delta x$ soit $df = \boxed{dx = \delta x}$. **Nous utiliserons cette notation par la suite**.

Troisième exemple. Considérons la fonction $f(x) := \sin x$. Par définition la différentielle en $x = a$ est $df = d(\sin x) = \cos a \cdot dx$. De façon usuelle la valeur courante de la variable x pour laquelle on calcule la différentielle n'est pas notée a mais tout simplement x. On écrit donc $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$ ou plus généralement

$$\boxed{df = f'(x) \cdot dx} \tag{3.3}$$

En divisant les deux membres de l'égalité précédente par dx nous retrouvons la notation déjà employée

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

mais alors qu'au paragraphe sur les dérivées (relation 3.1) la notation $\frac{df}{dx}$ ne représentait qu'une écriture commode, ici c'est devenu le rapport $df\,/\,dx$ de deux différentielles.

3.6.2 Représentation graphique.

La différentielle et la variation d'une fonction au voisinage de $x = a$ peuvent être interprétées graphiquement (fig. 3.27).

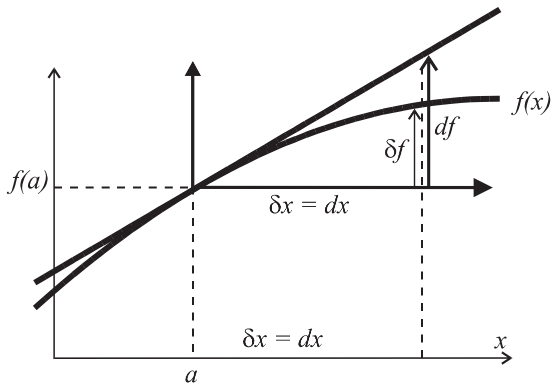

fig. 3.27 : Différentielle df, et variation δf.

Sur la figure précédente il est aisé de saisir la raison pour laquelle df et δf sont voisins lorsque $\delta x = dx$ est assez petit.

Nous reviendrons sur ce point plus loin.

3.6.3 Expressions remarquables

Soient u et v deux fonctions et a une constante. En utilisant les définitions et les propriétés précédentes on obtient

$u = cte \Longleftrightarrow du = 0$	$d(u + av) = du + adv$
$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
$d\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\,du$	$d\ln\lvert u\rvert = \dfrac{du}{u}$

Exemple. Le calcul de $d\left(\dfrac{1}{h}\right)$ peut se faire de diverses façons.
La relation $d\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\,du$ avec $n = -1$ et $u = h$ donne

$$d\left(\frac{1}{h}\right) = d\left(h^{-1}\right) = -\,h^{-2}\,dh = \frac{-1}{h^2}dh.$$

La relation $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ avec $v = h$ et $u = 1$ (et donc $du = 0$) donne

$$d\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{-dh}{h^2}.$$

Considérons la quantité $F = u^n \cdot v^m \cdot ..$ Il vient $\ln\lvert F\rvert = n\ln\lvert u\rvert + m\ln\lvert v\rvert + ..$

Nous calculons les différentielles de chaque membre (ce que l'on appelle "**la différentielle logarithmique de** F").

En utilisant les relations $d\ln\lvert F\rvert = \dfrac{dF}{F}$ ainsi que $d\ln\lvert u\rvert = \dfrac{du}{u}$ et $d\ln\lvert v\rvert = \dfrac{dv}{v}$, nous obtenons

$$\boxed{F = u^n \cdot v^m \cdot .... \Longrightarrow \frac{dF}{F} = n\frac{du}{u} + m\frac{dv}{v} + ...} \tag{3.4}$$

Exemple. $F = \sqrt{x}/\left(x + 1\right).$ On écrit $F = x^{1/2} \cdot \left(x + 1\right)^{-1}.$
La relation 3.4 s'écrit $dF/F = \frac{1}{2}dx/x - d\left(x + 1\right)/\left(x + 1\right).$
Avec $d(x + 1) = dx$, on obtient $\dfrac{dF}{F} = \dfrac{1 - x}{2x\left(1 + x\right)}\,dx.$

3.6.4 Dérivée d'une fonction de fonction (composition de fonctions).

Considérons une grandeur physique F, fonction de la variable u : $F = f(u)$. Supposons que u soit une fonction de la variable t. La grandeur F peut alors être considérée comme une fonction de t : $F = \varphi(t) := f\left[u(t)\right].$

La relation 3.3 conduit aux relations suivantes $dF = \dfrac{dF}{dt}dt = \dfrac{dF}{du}du$. L'écriture $\dfrac{dF}{dt}$ signifie que F est considéré comme une fonction de t : $\dfrac{dF}{dt} := \dfrac{d\varphi}{dt}$ tandis que $\dfrac{dF}{du}$ signifie que F est considéré comme une fonction de u : $\dfrac{dF}{du} := \dfrac{df}{du}$.

Cependant u est une fonction de t; on écrit $du = \dfrac{du}{dt}dt.$

Il vient donc $dF = \frac{dF}{du} \cdot du = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt} dt$, cependant $dF = \frac{dF}{dt} dt$; par conséquent

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dt}} \quad \text{soit encore } \frac{d}{dt} f\,[u(t)] = u\,' \left(\frac{df}{du}\right)_{u(t)}$$

Pour calculer la dérivée de F en $t = t_0$, chacune de ces quantités doit être calculées en $t = t_0$ et donc avec $u = u(t_0)$.

L'emploi des différentielles donne une grande souplesse d'écriture lorsqu'on utilise les grandeurs (F) de préférence aux fonctions (f et φ). C'est généralement l'usage en physique.

3.6.5 Calculs d'incertitudes

Les différentielles représentent un moyen d'estimer les incertitudes expérimentales. Nous faisons ici un rappel sur les incertitudes en général avant de montrer les applications des différentielles dans ce domaine.

Le résultat d'une mesure est en général donné sous la forme

$$F = f \pm \Delta f$$

Par exemple pour un longueur : $F = 5,231\,\mathrm{m} \pm 2\,10^{-3}\,\mathrm{m}$. L'**"incertitude absolue"** sur la mesure est Δf ; c'est une grandeur positive tandis que f est l'estimation de la grandeur mesurée. Une telle expression a même signification que les inégalités

$$f - \Delta f < F < f + \Delta f$$

On définit aussi l'**"incertitude relative"** $\Delta f \,/\, |F|$. La vraie valeur de F n'est pas connue, on estime donc l'incertitude relative au moyen de la grandeur $\Delta f \,/\, |f|$.

L'incertitude absolue s'exprime avec les mêmes unités que f; par contre l'incertitude relative est un nombre pur, sans unités.

Il ne faut pas confondre incertitude et erreur. L'**"erreur",** e, est défini par la relation $e := f - F$; elle est inconnue. Si e était connue, $F = f - e$ serait connu sans incertitude car f est connu.

Pour déterminer les incertitudes, on peut estimer un majorant des erreurs. On peut aussi répéter plusieurs fois la même mesure et apprécier les petites variations des résultats obtenus. Cette méthode conduit à la notion d'incertitude standard.

3.6.6 Petites variations.

Lorsque $dx = \delta x$ **est "assez" petit**, nous admettons la relation

$$\boxed{\delta f \simeq df := \left(\frac{df}{dx}\right)_a dx}$$

Cette approximation est équivalente à celle qui consiste à identifier la fonction f à son développement de Taylor du premier ordre ou à identifier le graphe de f à sa tangente en $x = a$. Justifions cette approximation sur un exemple.

Exemple. L'aire d'un cercle de rayon x est $A = \pi x^2$. Lorsque x varie de r à $r + \delta r$, l'aire du cercle subit la variation δA représentée par l'anneau circulaire gris de la figure 3.28.

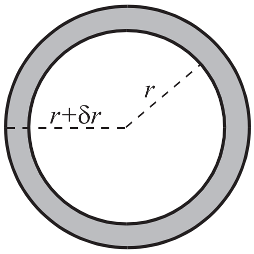

fig. 3.28 :
$dA = 2\pi r\, dr$.

La différentielle de A est $dA = 2\pi x\, dx$. Sa valeur pour $x = r$ et $dx = \delta r$ est $dA = 2\pi r\, \delta r$. La variation de A est $\delta A = \pi\, (r + \delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\, \delta r + \pi\, \delta r^{\,2}$. Le terme $2\pi r\, \delta r$ est du premier degré relativement à δr ; on dit que c'est **un terme du premier ordre** ; $\pi\, \delta r^{\,2}$ est du second degré relativement à δr : c'est **un terme du second ordre**. En posant $\delta f \simeq df$ on commet l'erreur $e = \pi\, \delta r^{\,2}$: **l'erreur est du second ordre**. Lorsque δr est petit ($\delta r << r$), l'erreur relative est $\frac{\delta r}{2r} << 1$. Elle est négligeable et tend vers zéro avec δr.